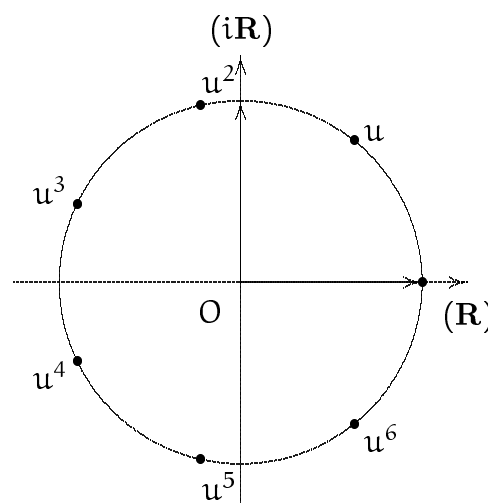


Corrigé du devoir n° 2 (sommes de Gauss)

- 1 Posons $z = [\rho; \theta]$; on sait que $z^7 = 1$ équivaut à $\rho^7 = 1$ et $7\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$; c'est-à-dire que les solutions de l'équation $z^7 = 1$ sont les sept nombres $e^{2ik\pi/7}$ avec $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On constate que parmi eux, seul celui dont l'argument est compris entre 0 et $\pi/2$, c'est-à-dire $u = e^{2i\pi/7} = \cos 2\pi/7 + i \sin 2\pi/7$, est de parties réelles et imaginaires strictement positives ; et qu'on peut donc exprimer la solution en terme de puissances de u sous la forme $S = \{1; u; u^2; u^3; u^4; u^5; u^6\}$. Les images des solutions forment un heptagone régulier, inscrit dans le cercle unité.



- 2 On a, pour tout n , $u^{7n} = 1$. Remarquant que $P(z) = z^7 - 1 = (z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = (z - 1)Q(z)$ (la formule des suites géométriques) et que $u^k \neq 1$ pour $1 \leq k \leq 6$, on voit que les u^k vérifient $P(u^k) = 0 = (u^k - 1)Q(u^k)$, et donc sont les racines du polynôme «me $Q(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, et finalement que l'on a la factorisation

$$Q(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z - u)(z - u^2)(z - u^3)(z - u^4)(z - u^5)(z - u^6).$$

- 3 On a posé $\alpha = u + u^2 + u^3$. On sait que la somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle : $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = (u^7 - 1)/(u - 1) = 0$. Comme on voit aisément que $u^4 = \overline{u^3}$ (puisque $e^{8i\pi/7} = e^{-6i\pi/7}$), que $u^5 = \overline{u^2}$ et que $u^6 = \overline{u}$, on en déduit que

$$1 + \alpha + \overline{\alpha} = 1 + (u + u^2 + u^3) + \overline{(u + u^2 + u^3)} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^6 + u^5 + u^4 = 0,$$

et donc que $1 + 2 \operatorname{Re}(\alpha) = 0$, c'est-à-dire que $\operatorname{Re}(\alpha) = -1/2$. Géométriquement, la somme des 7 vecteurs images des solutions étant nulle, et la figure étant symétrique par rapport à Ox , on voit que ce résultat s'interprète naturellement par projection des vecteurs sur l'axe des réels. Écrivant u , u^2 et u^3 sous forme trigonométrique, on obtient finalement $\operatorname{Re}(u + u^2 + u^3) = \cos 2\pi/7 + \cos 4\pi/7 + \cos 6\pi/7$, et donc

$$\cos 2\pi/7 + \cos 4\pi/7 + \cos 6\pi/7 = -1/2.$$

Comme on sait que $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ et que $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$, on peut, en posant $\alpha = 2\pi/7$ et $X = \cos 2\pi/7$, en déduire que $X + (2X^2 - 1) + (4X^3 - 3X) = -1/2$, et donc que X est racine du polynôme «me $P = 4X^3 + 2X^2 - 2X - 1/2$. Une analyse soignée du raisonnement précédent montrerait d'ailleurs que les deux autres racines de P sont $\cos 4\pi/7$ et $\cos 6\pi/7$.

- 4 Comme on a $u^7 = 1$, on voit que $u^{7n+k} = u^k$, et donc qu'on peut écrire $s = 1 + u + u^4 + u^2 + u^5 + u^3 + u^6 = 1 + 2(u + u^2 + u^3)$. On a par conséquent

$$s = 1 + 2(\cos 2\pi/7 + \cos 4\pi/7 + \cos 6\pi/7) + 2i(\sin 2\pi/7 + \sin 4\pi/7 + \sin 6\pi/7);$$

la calculatrice donne $\operatorname{Re}(s) = 0$ (à 10^{-9} près) et $\operatorname{Im}(s) = 2,6458751311$; s semble donc imaginaire pur.

5 $s - 2a - 1 = 2(u^4 - u^3)$. Comme on sait que $u^4 = 1/u^3$ (puisque $u^7 = 1$), et que $u^4 \overline{u^4} = |u^4|^2 = 1$, on en déduit que $u^4 = \overline{u^3}$, et donc que $b = s - 2a - 1 = 2(\overline{u^3} - u^3)$ est imaginaire pur (puisque $\overline{b} = -b$). Comme on a vu que $\operatorname{Re}(a) = -1/2$, on en déduit que s est également imaginaire pur.

6 Développons $s^2 = (1 + 2(u + u^2 + u^4))^2$. On obtient

$$s^2 = 1 + 4u + 8u^2 + 8u^3 + 8u^4 + 8u^5 + 8u^6 + 4u^8;$$

et comme $u^8 = u$, on a donc $s^2 = 1 + 8(u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6)$; or on a rappelé en 2 que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = 0$; on en déduit donc que $s^2 = -7$, et compte tenu de la valeur numérique (positive) trouvée en 3, que $s = i\sqrt{7}$.

7 La généralisation cherchée semble porter sur l'étude des «sommes de Gauss» définies par $s(n) = 1 + u + u^4 + \dots + u^{k^2} + \dots + u^{(n-1)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} u^{k^2}$, où u est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité «bien choisie» (on prendra ici $u = e^{2i\pi/n}$). On vient de voir que $s(7) = i\sqrt{7}$; déterminons $s(n)$ pour $n \leq 6$. On obtient

$$\begin{aligned} s(2) &= 1 + (-1) &&= 0 \\ s(3) &= 1 + j + j^4 &&= 1 + 2j &&= i\sqrt{3} \\ s(4) &= 1 + i + i^4 + i^9 &&= 2(1 + i) &&= (1 + i)\sqrt{4} \\ s(5) &= 1 + a + a^4 + a^9 + a^{16} &&= 1 + 2(a + \overline{a}) &&= \sqrt{5} \\ s(6) &= 1 + b + b^4 + b^9 + b^{16} + b^{25} &&= 1 + 2(b + b^4) + (-1) &&= 0 \end{aligned}$$

(où $a = e^{2i\pi/5} = \cos 2\pi/5 + i \operatorname{Im}(a) = (\sqrt{5} - 1)/4 + i \sin 2\pi/5$, et $b = e^{i\pi/3} = -j^2 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$); résultats qui laissent entrevoir une certaine régularité, au moins pour n impair, et permettent de conjecturer que $s(9) = \sqrt{9} = 3$ (ou peut-être $3i$).

De fait, il est aisé de vérifier numériquement que

$$s(9) = 1 + u + u^4 + u^9 + u^{16} + u^{25} + u^{36} + u^{49} + u^{64} = 3 + 2u + 2u^4 + 2u^7 = 3$$

(en prenant par exemple des valeurs numériques des cosinus), mais ce genre de vérification numérique ne prouve pas vraiment le résultat; en fait, une preuve très simple consiste à remarquer que $u^3 = j$, et que $s(9)$ est donc égal à $3 + 2u(1 + j + j^2)$, et donc bien à 3. Il ne semble pas si facile de déterminer $s(11)$, mais la calculatrice donne (à 10^{-12} près) $s(11) \simeq i\sqrt{11}$. La valeur de $s(n)$ dans le cas général est beaucoup plus délicate à obtenir; un programme de calcul tel que celui-ci (établi pour Casio 7500, pour ne pas trop utiliser les raccourcis que procurent des machines plus coûteuses) :

```
"N"?→N: 0→R: 0→S: 0→K: Lbl 1: R+cos(2πK²/N) → R:
S+sin(2πK²/N) → S: K+1→K: K<N⇒Goto 1: R↱S↱
```

permet d'obtenir assez vite une table de valeurs de $s(n)$ pour $n \leq 100$, d'où on peut conjecturer la forme générale que l'on va donner plus loin; il n'est pas trop difficile (pour un bon mathématicien, ayant déjà de sérieuses connaissances en théorie des nombres !) de montrer des simplifications analogues à celles déjà vues dans le calcul de s^2 , mais Gauss lui-même a avoué avoir passé plusieurs années (!) sur le problème du signe de s . On obtient finalement $s(n) = 0$ si $n = 4k + 2$, $s(4k) = (1 + i)\sqrt{4k}$, $s(4k + 1) = \sqrt{4k + 1}$ et $s(4k + 3) = i\sqrt{4k + 3}$; comme on vient de le dire, donner même une idée de la démonstration dépasserait de très loin nos possibilités (à titre de curiosité, une démonstration n'utilisant que les connaissances de Spé (MP*) constituait le sujet du problème d'algèbre (1^{ère} épreuve, 6 heures) de l'ENS Ulm-Lyon de 2001).