

Réponses

- 1) On procède par récurrence sur n .
- 2) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) On procède par récurrence sur n en remarquant que $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
- 4) On pose $n = 3k$ et on procède par récurrence sur k .
- 5) On procède par récurrence forte sur n .
- 6) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.
- 7) On procède par récurrence avec prédécesseurs sur n .
- 8) $(n+1)^2$ et $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
- 9) $(n+1)! - 1$.
- 10) $u_n = 2 \times 3^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.
- 11) $\frac{1}{3}(2^{2n+3} - 2)$ et $2^{[(n+1)^2]}$.
- 12) $f([-2; 2]) = [-7; 20]$ et $f^{-1}([-7; 20]) = \left[-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right]$.
- 13) $f \circ g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & x \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$
- 14) On montre que f est injective et surjective.
- 15) 6.
- 16) 0 si $p > n$ et $\frac{n!}{(n-p)!}$ sinon.
- 17) $7 + \binom{7}{2} = 28$ dominos.
- 18) $\binom{4}{4} \binom{28}{1} + \binom{4}{3} \binom{28}{2} = 1540$.
- 19) $\frac{13 \times 48}{\binom{52}{5}} = \frac{13 \times 48 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} = \frac{1}{17 \times 5 \times 49} = \frac{1}{4165}$.
- 20) $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ admet $5 \times 3 \times 2 = 30$ diviseurs.
- 21)
 1. $(2n)!$: on place d'abord un individu sur une place donnée puis les autres successivement en tournant autour de la table.
 2. $2(n!)^2$: $2n \times n \times (n-1) \times (n-1) \times (n-2) \times (n-2) \dots$
 3. $2^{n+1}n!$ si $n > 1$ et 2 si $n = 1$: une fois placé le premier individu, il y a deux façons de placer son conjoint si $n > 1$, pour les couples suivants il n'y a qu'une façon de placer le conjoint.
 4. $4n!$ si $n > 1$ et 2 si $n = 1$.
- 22) La somme vaut $f'(0) = n2^{n-1}$.