

Concours blanc - Mathématiques 2

(adapté de CCP 2006)

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées

* * *

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Problème

Ce problème comporte quatre parties. La partie **A** est indépendante des parties **B**, **C** et **D**.

Partie A (Résolution d'une équation différentielle)

1. On considère l'équation différentielle $(E_1) : xy' - y = \ln x$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - (a) Résoudre l'équation homogène associée.
 - (b) Déterminer une solution particulière de l'équation complète.
 - (c) Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) .
 - (d) Préciser la solution f de l'équation (E_1) telle que $f(1) = 0$.
2. On considère l'équation différentielle $(E_2) : x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln x$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - (a) Déterminer une solution de l'équation homogène associée de la forme $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (b) Chercher une autre solution de l'équation homogène associée de la forme $y(x) = K(x)x^\alpha$ en donnant à α la valeur trouvée à la question précédente. On montrera que K' vérifie une équation différentielle du premier ordre.
 - (c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
 - (d) Vérifier que la fonction y_0 définie par $y_0(x) = -1 - \ln x$ est une solution particulière de l'équation (E_2) .
 - (e) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) .
 - (f) Démontrer que la fonction f définie à la question 1d est l'unique solution de l'équation (E_2) telle que $y(1) = y'(1) = 0$.

Partie B (Étude de la fonction f)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$.

1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Représenter graphiquement la fonction f .
3. Dédire de l'étude des variations de f que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Étudier $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{\epsilon}^1 f(x) dx$.
6. Étudier $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M f(x) dx$.

Partie C (Comparaison des moyennes)

On considère n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$.

On appelle moyenne arithmétique de ces nombres le nombre réel $m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

On appelle moyenne géométrique de ces nombres le nombre réel $m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

On appelle moyenne harmonique de ces nombres le nombre réel $m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$.

1. En appliquant l'inégalité montrée à la question 3 partie **B** aux réels $\frac{a_i}{m_a}$, montrer que $m_g \leq m_a$.
2. Dans quel cas a-t-on $m_g = m_a$?
3. Démontrer que pour tout triplet (x, y, z) de réels, on a $x^4 y^2 z^2 + x^2 y^4 z^2 + x^2 y^2 z^4 - 4x^2 y^2 z^2 + 1 \geq 0$.
4. En appliquant l'inégalité vue à la question 1 aux réels $\frac{1}{a_i}$, montrer que $m_h \leq m_g$.
5. Dans quel cas a-t-on $m_h = m_g$?
6. Dédire des questions précédentes que $m_h \leq m_a$. En déduire que, pour tous nombres réels strictement positifs $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$.

Partie D (Détermination d'un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$)

1. Dédire de l'inégalité $m_g \leq m_a$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$.
2. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$.
4. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a $\frac{n}{1 + \ln n} \leq \sqrt[n]{n!}$.
5. Déterminer la limite de $\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers $+\infty$.
6. Démontrer que la suite $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n>0}$ est croissante, on pourra considérer la suite $\left(\ln(\sqrt[n]{n!})\right)_{n>0}$.
7. Montrer que la suite $\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)_{n>0}$ est bornée et en donner un encadrement à l'aide des questions précédentes.
8. Déterminer, pour k un entier naturel supérieur ou égal à 2, un encadrement de $\ln k$ par deux intégrales de la fonction $\ln$. En déduire que $\int_1^n \ln x \, dx \leq \sum_{k=1}^{k=n} \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln x \, dx$.
9. En déduire un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers $+\infty$.