

TD 23 : Séries numériques

Exercice 1

Nature des séries de terme général (u_n) :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} u_n &= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n} & \textcircled{2} u_n &= n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) & \textcircled{3} u_n &= \ln\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right) & \textcircled{4} u_n &= e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ \textcircled{5} u_0 \in \mathbf{R}, u_{n+1} &= \frac{e^{-u_n}}{n+1} & \textcircled{6} u_n &= \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3} & \textcircled{7} u_n &= \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} & \textcircled{8} u_n &= \frac{1}{n} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) & \textcircled{9} u_n &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}. \end{aligned}$$

Exercice 2

Convergence et somme des séries :

$$\textcircled{1} \sum \frac{1}{n(n+1)} \quad \textcircled{2} \sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) \quad \textcircled{3} \sum \frac{\cos n\alpha}{2^n} \quad (\alpha \in \mathbf{R})$$

Exercice 3

1/ Etudier la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

(On pourra considérer la série de terme général $v_n = u_n - u_{n-1}$.)

Remarque : la limite, notée γ , est appelée constante d'Euler. $\gamma \approx 0,5772156649\dots$

2/ Nature de la série $\sum \frac{1}{n(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})}$

Exercice 4

Étudier la suite $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - \ln(\ln(n))$

Exercice 5

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{u_{n+1}}$ à termes dans $\mathbf{R}_+^*$ sont de même nature.

Exercice 6

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)} \sim \frac{\ln x}{x}$ pour x au voisinage de $+\infty$ (On peut utiliser le théorème de comparaison série-intégrale avec $f : t \mapsto \frac{1}{t(t+x)}$).

Exercice 7

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!}.$$

1/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ peut se mettre sous la forme e^{v_n} .

2/ Étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

3/ Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ strictement positif, puis déduire un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.