

TD 8 : Équations différentielles linéaires

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1/ $y' + y = \cos t + \sin t$

2/ $y' - 2y = e^x + 4 \sin x$

3/ $y'' - 2y' + 5y = x^2$

4/ $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$

5/ $y' - y \ln x = e^{x \ln x}$

6/ $y'' + y = \sin x + \cos x$

7/ $y' - 2y = x^2$ avec $y(0) = 1$

8/ $y'' + 4y' = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(\pi) = -2$

Exercice 2

Soit f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que, pour tout x de $[0, 1]$:

$$g(x) = \int_0^x f(x) \, dx, \quad f(x) = \int_0^x g(x) \, dx.$$

1/ Montrer que f et g sont solutions de l'équation différentielle : $y'' - y = 0$.

2/ En déduire que f et g sont nulles sur $[0, 1]$.

Exercice 3

Un circuit électrique constitué d'un condensateur de capacité C se décharge dans une résistance R . Calculer l'évolution de la charge électrique qui vérifie $q(t) = -RC \frac{dq(t)}{dt}$.

Exercice 4

Un tasse de café de température $T_0 = 100^\circ \text{C}$ est posée dans une pièce de température $T_\infty = 20^\circ \text{C}$. La loi de Newton affirme que la vitesse de décroissance de la température $\frac{dT(t)}{dt}$ est proportionnelle à l'écart entre sa température $T(t)$ et la température ambiante T_∞ . Sachant qu'au bout de 3 minutes la température du café est passée à 80°C , combien de temps faudra-t-il pour avoir un café à 65°C ?

Exercice 5

On a un système obéissant à l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{E}) : y''(t) + 2ky'(t) + \omega^2 y(t) = e^{i2t} \quad \text{où } (k, \omega) \in \mathbb{R}_+^{*2}.$$

Ici, la variable est notée t (temps). ω est la pulsation propre du système et k le coefficient d'amortissement.

1/ Montrer que $t \mapsto a e^{i2t}$ ($a \in \mathbb{C}$) (*régime permanent*) est une solution particulière de l'équation différentielle.

2/ Étudier le module et l'argument de a , qui représentent l'amplitude et le déphasage de la « réponse » du système.

3/ Tracer les courbes de $\omega \mapsto |a|$ et $\omega \mapsto \arg a$ pour $k \in \{1/2, 1, 2, 3\}$. Conclure.

4/ Donner la solution générale de $(\mathcal{E})$.