

Devoir surveillé 1

Exercice 1. Appliquons la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & + & \lambda y & - & z & = & a \\ 2x & + & \lambda y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array} \right. \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left\{ \begin{array}{cccc} x & + & \lambda y & - & z & = & a \\ & & -\lambda y & + & 3z & = & -2a \\ & & (2-\lambda)y & + & 2z & = & 1-a \end{array} \right.$$

$$\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2] \left\{ \begin{array}{cccc} x & + & \lambda y & - & z & = & a \\ & & -\lambda y & + & 3z & = & -2a \\ & & (2-\frac{1}{3}\lambda)y & & & = & 1+\frac{1}{3}a. \end{array} \right.$$

Si $\lambda \neq 6$, on obtient $y = \frac{3+\lambda}{6-\lambda}$, puis $z = \frac{a\lambda-4a+\lambda}{6-\lambda}$ et $x = -\frac{a\lambda-2a+2\lambda}{6-\lambda}$.

Si $\lambda = 6$, il n'y pas de solution pour $a \neq -3$.

Si $\lambda = 6$ et $a = -3$, le système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & + & 6y & - & z & = & -3 \\ & & -6y & + & 3z & = & -6 \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & + & 6y & - & z & = & -3 \\ & & 2y & - & z & = & 2. \end{array} \right.$$

Les solutions sont alors $(x, y, z) = (-4\gamma - 5, \gamma, 2\gamma - 2)$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.

On conclut

1. Si $\lambda \neq 6$, l'ensemble solution est $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{a\lambda-2a+2\lambda}{6-\lambda}, \frac{3+\lambda}{6-\lambda}, \frac{a\lambda-4a+\lambda}{6-\lambda} \right) \right\}$
2. Si $\lambda = 6$ et $a \neq -3$, l'ensemble solution est $\mathcal{S} = \emptyset$.
3. Si $\lambda = 6$ et $a = -3$, l'ensemble solution est $\mathcal{S} = \{(-4\gamma - 5, \gamma, 2\gamma - 2) \ ; \ \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2.

On cherche à résoudre

$$2|x^2 - 2x| - |x - 1| - 1 \leq 0.$$

On rappelle qu'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est du signe opposé à celui a si x est entre les 2 racines réelles (si elles existent) de $ax^2 + bx + c = 0$ et du même signe sinon.

On remarque que $x^2 - 2x$ change de signe en $x = 0$ et $x = 2$ et $x - 1$ en $x = 1$.

On en déduit

x			$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$ x^2 - 2x $			$x^2 - 2x$		$-x^2 + 2x$	$-x^2 + 2x$	$x^2 - 2x$
$ x - 1 $			$-x + 1$		$-x + 1$	$x - 1$	$x - 1$
2	$ x^2 - 2x $	$- x - 1 - 1$	$2x^2 - 3x - 2$		$-2x^2 + 5x - 2$	$-2x^2 + 3x$	$2x^2 - 3x$

On rappelle qu'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est du signe opposé à celui a si x est entre les 2 racines réelles (si elles existent) de $ax^2 + bx + c = 0$ et du même signe sinon.

On discute selon les cas :

- Si $x \leq 0$, les racine de $2x^2 - 3x - 2$ sont $-\frac{1}{2}$ et 2. Comme le coefficient dominant (a) est positif, $x \in [-\frac{1}{4}, 1]$. On trouve donc

$$\mathcal{S}_1 = [-\frac{1}{2}, 0].$$

- Si $0 \leq x \leq 1$, les racine de $-2x^2 + 5x - 2$ sont $\frac{1}{2}$ et 2. Comme le coefficient dominant (a) est négatif, $x \in]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$. On trouve donc

$$\mathcal{S}_2 = [0, \frac{1}{2}].$$

- Si $1 \leq x \leq 2$, les racine de $-2x^2 + 3x$ sont 0 et $\frac{3}{2}$. Comme le coefficient dominant (a) est négatif, $x \in]-\infty, 0] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$. On trouve donc

$$\mathcal{S}_3 = [\frac{3}{2}, 2].$$

- Si $2 \leq x$, les racine de $2x^2 - 5x$ sont 0 et $\frac{5}{2}$. Comme le coefficient dominant (a) est positif, il faut donc $x \in [0, \frac{5}{2}]$. On trouve donc

$$\mathcal{S}_4 = [2, \frac{5}{2}].$$

On conclut que l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathcal{S} = [-\frac{1}{2}, 0] \cup [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2] \cup [2, \frac{5}{2}] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}].}$$

Exercice 3.

1. Cas $p = 1$:

(a) En mettant au même dénominateur, on a

$$\frac{a}{k} - \frac{b}{k+1} = \frac{(ab+b)k+a}{k(k+1)}.$$

Une condition suffisante est donc $a = 1$ et $b = -1$ (l'unicité n'est pas demandée). On conclut

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

(b) En utilisant la question précédente, on calcule

$$\begin{aligned} v_{1,n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \quad (\text{Changement d'indice deuxième somme}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{On conclut } \boxed{v_{1,n} = 1 - \frac{1}{n+1}}$$

(c) Par passage à la limite, dans l'expression précédente, on conclut que

$$\boxed{\text{la suite } (v_{1,n}) \text{ converge vers } \sigma(1) = 1.}$$

2. Cas général

(a) En mettant au même dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned} u_{p-1,n} - u_{p-1,n+1} &= \frac{1}{n(n+1) \cdots (n+p-1)} - \frac{1}{(n+1) \cdots (n+p)} \\ &= \frac{(n+p) - n}{n(n+1) \cdots (n+p)} = \frac{p}{n(n+1) \cdots (n+p)} \\ &= p u_{p,n} \end{aligned}$$

On conclut $\boxed{\forall p \geq 1, \forall n \geq 1, u_{p-1,n} - u_{p-1,n+1} = p u_{p,n}}$

(b) En utilisant la question précédente, on a

$$v_{p,n} \sum_{k=1}^n u_{p,k} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n (u_{p-1,k} - u_{p-1,k+1}).$$

Par télescopage, on conclut donc

$$\boxed{v_{p,n} = \frac{1}{p} (u_{p-1,1} - u_{p-1,n+1})}.$$

(c) Pour $p \geq 1$, on a

$$0 \leq u_{p-1,n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdots (n+p)} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que

$$v_{p,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} u_{p-1,1} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (1+p-1)} = \frac{1}{p \cdot p!}.$$

On conclut que

$$\boxed{\text{pour } p \geq 1, \text{ la suite } (v_{n,p}) \text{ converge vers } \sigma(p) = \frac{1}{p \cdot p!}}.$$

Exercice 4.

1. On calcule directement

$$I_0(a) = \int_0^a e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^a = 1 - e^{-a}.$$

On conclut donc

$$\boxed{I_0(a) = 1 - e^{-a}}.$$

2. (a) La formule de dérivation d'un produit nous donne, pour $n > 0$,

$$f'_n(x) = \left(\frac{x^n}{n!}\right)' e^{-x} + \frac{x^n}{n!} (e^{-x})' = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} - \frac{x^n}{n!} e^{-x} = f_{n-1}(x) - f_n(x)$$

De plus, $f_n(0) = 0^n e^{-0} = 0$. On conclut donc que

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } n > 0, \text{ on a } f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x) \text{ et } f_n(0) = 0}.$$

(b) Pour $n > 0$, en intégrant, l'égalité obtenue à la question précédente, on a

$$\int_0^a f'_n(t) dt = \int_0^a f_{n-1}(t) dt - \int_0^a f_n(t) dt,$$

soit

$$f_n(a) - f_n(0) = I_{n-1}(a) - I_n(a).$$

Il en résulte

$$\frac{a^n}{n!} = I_{n-1}(a) - I_n(a)$$

et on conclut

$$\forall n > 0, \quad I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a}.$$

(c) Montrons par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n(a) = 1 - e^{-a} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}.$$

Initialisation :

Pour $n = 0$, grâce à la question 1, on a $I_0(a) = 1 - e^{-a}$. La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité :

Supposons qu'à un rang n fixé, on ait $I_n(a) = 1 - e^{-a} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$.

Grâce à la formule démontrée à la question précédente, on a

$$I_{n+1}(a) = I_n(a) - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^{-a}.$$

Il en résulte en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$I_{n+1}(a) = 1 - e^{-a} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^{-a} = 1 - e^{-a} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a^k}{k!}.$$

La propriété est donc héréditaire.

On conclut donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n(a) = 1 - e^{-a} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}.$$

3. (a) Pour $x \leq 0$, on a $0 < e^x \leq 1$. On en déduit

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq e^{-x} \leq 1.$$

Puis comme $\frac{x^n}{n!} \geq 0$, il en résulte

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq e^{-x} \leq \frac{x^n}{n!}.$$

On conclut donc

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}.$$

(b) Comme les bornes sont dans le bon sens, on a

$$0 \leq \int_0^1 f_n(t) dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{n!} dt = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n!}.$$

On conclut que

$$\forall n, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

(c) Comme $(n+1)! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que

$$e^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e(1 - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e,$$

et on conclut

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e.$$

Exercice 5.

1. La fonction f_1 est dérivable sur $[0, +\infty[$, grâce aux règles de composition et

$$f_1'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

Sur $[0, +\infty[$, le seul point d'annulation est $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. De plus, en posant $y = x^2$, par croissance comparée, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{e^y} = 0.$$

On a donc

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	0

2. La fonction f_3 est dérivable sur $[0, +\infty[$, grâce aux règles de composition et

$$f_3'(x) = (3x^2 - 2x^4)e^{-x^2}.$$

Sur $[0, +\infty[$, le seul point d'annulation est $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$. De plus, en posant $y = x^2$, par croissance comparée, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{e^y} = 0.$$

On a donc

x	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f_3'(x)$	+	0	-
$f_3(x)$	0	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}$	0

3. On a

$$f_1(x) - f_3(x) = x(1 - x^2)e^{-x^2}.$$

On en déduit

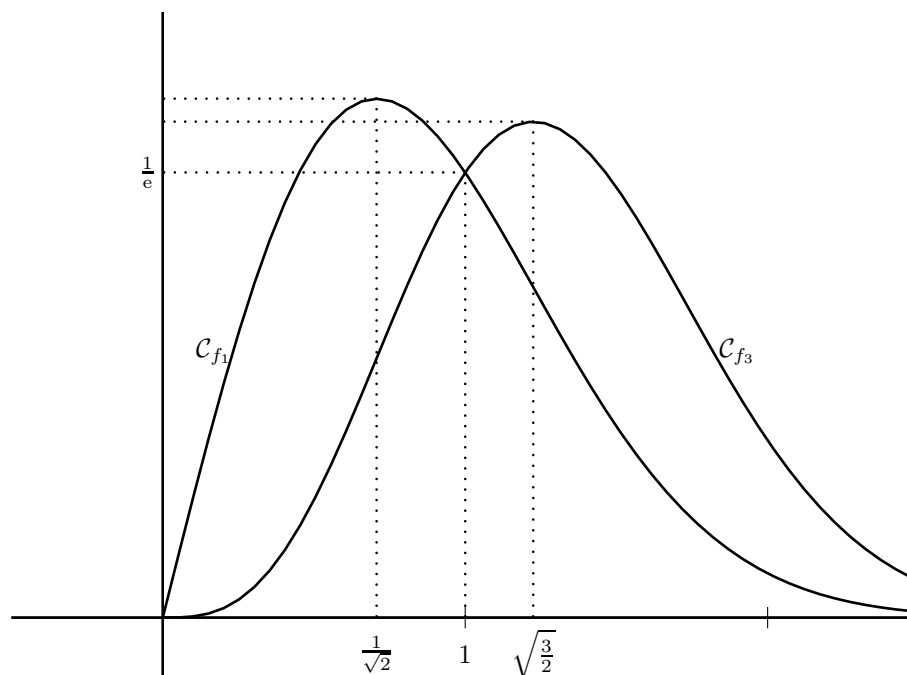
x	0	1	$+\infty$
$f_1(x) - f_3(x)$	+	0	-

4. On a

$$f_1(x) - f_3(x) = x(1 - x^2)e^{-x^2}.$$

On en déduit

x	0	1	$+\infty$
$f_1(x) - f_3(x)$	+	0	-



5. La fonction f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$, grâce aux règles de composition et

$$f'_n(x) = (nx^{n-1} - 2x^{n+1})e^{-x^2}.$$

Sur $[0, +\infty[$, le seul point d'annulation est $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. De plus, en posant $y = x^2$, par croissance comparée, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{\frac{n}{2}}}{e^y} = 0.$$

On a donc

x	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$	0

On en déduit que

$$f_n \text{ atteint un maximum } y_n = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} \text{ en } x_n = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

6. Grâce à la question précédente, les coordonnées de S_2 sont $(1, \frac{1}{e})$.

De plus, $f_n(1) = 1^n e^{-1^2} = \frac{1}{e}$. On en déduit que

Le point S_2 appartient à $\mathcal{C}_n$ pour tout $n \geq 1$.

7. On a $y_n = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} = e^{-\frac{n}{2} + \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2}}$

En factorisant, on obtient

$$-\frac{n}{2} + \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \left(-1 + \ln \frac{n}{2}\right).$$

Ce qui implique

$$\lim_n -\frac{n}{2} + \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} = +\infty.$$

On conclut

$$\boxed{\lim_n y_n = +\infty.}$$

Exercice 6.

1. Soit une solution (x_0, y_0, z_0) avec une composante nulle, on a alors

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0.$$

Comme tout est positif, on en déduit que nécessairement $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. On vérifie que c'est bien une solution.

2. Soit une solution (x_0, y_0, z_0) avec aucune composante nulle. Supposons que $z_0 = \max(x_0, y_0, z_0)$

On a alors

$$x_0 + y_0 = (x_0 y_0 - 1) z_0.$$

Si $x_0 y_0 > 3$, on aurait $x_0 y_0 - 1 > 2$ d'où, par positivité

$$2 \max(x_0, y_0, z_0) \geq x_0 + y_0 = (x_0 y_0 - 1) z_0 > 2 \max(x_0, y_0, z_0).$$

Impossible.

3. Supposons $z_0 = \max(x_0, y_0, z_0)$ avec (x_0, y_0, z_0) solution avec aucune composante nulle. Grâce à la question précédente, les seules possibilités pour (x_0, y_0) sont les éléments de $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$. On teste les 3 premières possibilités, les deux dernières s'en déduisent :

- $x_0 = y_0 = 1$ donne $2 + z_0 = z_0$. Impossible !
- $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ donne $3 + z_0 = 2z_0$ soit $z_0 = 3$.
- $x_0 = 1$ et $y_0 = 3$ donne $4 + z_0 = 3z_0$ soit $z_0 = 2$. Contradictoire avec l'hypothèse $z_0 = \max(x_0, y_0, z_0)$.

Par symétrie des rôles, on conclut que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = \{(0, 0, 0), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (1, 3, 1), (3, 2, 1), (3, 1, 2)\}.$$