Devoir de Mathématiques 3

vendredi 21 novembre 2014

Durée : 3 heures

Remarques générales :

- Vérifiez que le sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.
- Vous êtes invité à apporter une attention particulière à la présentation et à la rédaction ; les copies peu lisibles ou mal présentées seront sanctionnées.
- Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

L'utilisation d'un téléphone portable, d'un ordinateur ou d'une calculatrice est interdite.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 1. Étude d'une fonction en notation puissance

Réaliser l'**étude complète** de la fonction f définie par $f(x) = x^x$. Tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct.

Exercice 2. Un problème de Cauchy

La question 3 peut-être abordée même sans avoir traité les précédentes.

1. Déterminer des constantes α et β telles que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{\alpha}{1+x} + \dfrac{\beta}{1-x}$.

   En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur un intervalle bien choisi.

2. Pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on pose :

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\cos(\theta)} \mathrm{d}\theta$$

   Utiliser le changement de variable $x = \sin(\theta)$ pour montrer que : $F(t) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}}\right)$.

3. Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ le problème suivant :

$$\begin{cases} y' = -y\tan(t) + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Équations différentielles du second ordre

Dans cet exercice on étudie deux équations différentielles du second ordre.

1. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} y'' + 3y = e^t + 1 \quad (E) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

   (a) Donner l'équation homogène (E_0) associée à (E) puis déterminer l'ensemble des solutions de (E_0) à valeurs réelles.

(b) On considère les équations :

$$(E_1)\ y'' + 3y = e^t \quad \text{et} \quad (E_2)\ y'' + 3y = 1$$

Déterminer une solution particulière de (E_1) et de (E_2) et en déduire une solution particulière de (E)

(c) Préciser l'ensemble des solutions de (E) à valeurs réelles puis résoudre le problème posé.

2. Déterminer l'ensemble des solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$$

Problème 1. Variations autour d'une fonction

Les trois parties de ce problème peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A. Étude de la fonction

1. **Question de cours.**
   (a) Rappeler la définition de la fonction arccos, donner son domaine de dérivablité et $\arccos'$.
   (b) Donner le tableau de variations complet de arccos et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct.
   (c) À l'aide d'une intégration par parties déterminer une primitive de la fonction arccos

On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \arccos\left(\frac{1-t}{1+t}\right).$$

2. Montrer à l'aide d'une étude de fonction que $\dfrac{1-t}{1+t} \in [-1, 1]$ si et seulement si $t \in \mathbb{R}_+$. En déduire le domaine de définition de la fonction f.
3. **Étude de la dérivabilité et réécriture de** f.
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

   $$f'(t) = \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$$

   (b) Justifier que la fonction $t \mapsto \arctan(\sqrt{t})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. On rappelera avant cela une expression de $\arctan'$.
   (c) En déduire que pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 2\arctan(\sqrt{t})$.
4. Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
5. Donner le tableau de variation complet de f et tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé direct. On admet que $\mathscr{C}_f$ a une demi-tangente verticale au point d'abscisse $x = 0$.

Partie B. Calcul d'une primitive

6. En remarquant que $\dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$ déterminer une expression pour une primitive de $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^2}$.
7. Pour $t > 0$, on considère l'expression :

   $$G(t) = \int_1^t \frac{\sqrt{s}}{1+s}\mathrm{d}s$$

   À l'aide du changement de variable $r = \sqrt{s}$ et de la question précédente calculer une expression de $G(t)$.
8. Calculer, avec une intégration par parties bien choisie, une primitive F de la fonction f.

Partie C. Une équation différentielle

9. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles de l'équation différentielle homogène

$$(E_0) \quad y' = \frac{y}{2t}\cdot$$

10. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$(E_1) \quad y' = \frac{y}{2t} + \frac{1}{1+t}\cdot$$

On exprimera les solutions à l'aide de la fonction f.

11. Justifier l'existence d'une unique solution de l'équation (E) ayant une limite finie en $+\infty$. Préciser cette limite.

12. La fonction `dsolve` de la librairie Python `sympy` permet de résoudre formellement certaines équations différentielles. Nous l'avons utilisée pour la résolution de l'équation (E_1) ; cela s'obtient avec la séquence d'instructions :

```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=symbols('y',cls=Function)

eqd=Eq(y(x).diff(x) - y(x)/(2*x) - 1/(1+x),0)
print(eqd)
print(dsolve(eqd,y(x)))
```

Nous arrivons à en extraire la solution suivante :

y(x) == sqrt(x)(C1 -2*asin(1/sqrt(x + 1)))*

Les solutions données par Python sont-elles correctes ? Comparer-les aux solutions obtenues à l'issue de la question 10.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Fin de l'énoncé