

DEVOIR SURVEILLÉ n°2 du samedi 8 octobre

*Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*

Exercice 1 (Une étude de fonction) On note f la fonction de variable réelle définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0. Dessiner alors l'allure de la courbe de f au voisinage de 0.
3. Justifier avec soin que f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$. En déduire les variations de f que l'on présentera dans un tableau.
4. Démontrer que $f(x)$ est équivalent à x au voisinage de $+\infty$.
5. Compléter ce tableau de variations en y faisant figurer les limites.
6. Démontrer que pour $x \in D$, on a

$$f(x) - x = x \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{-1}{2}} - 1 \right).$$

En déduire la limite en $+\infty$ de $f(x) - x$. Interpréter graphiquement.

Exercice 2 (Une dérivée n -ième) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de déterminer la dérivée n -ième de la fonction $f : x \mapsto \cos^3 x$.

1. Déterminer la dérivée de f .

Si l'on veut calculer la dérivée seconde ou troisième, les calculs se compliquent... On va utiliser une autre méthode.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(e^{ix} + e^{-ix})^3$. En déduire que

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x).$$

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

4. En déduire la dérivée n -ième de f .

Exercice 3 (Calcul de $\tan \frac{\pi}{5}$) On considère le polynôme $P(X) = \frac{1}{2i}((X+i)^5 - (X-i)^5)$.

1. Résoudre l'équation $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. En déduire les racines du polynôme P . Vérifier qu'elles sont toutes réelles.
2. Écrire (inutile de justifier) le polynôme P sous la forme $P(X) = aX^4 + bX^2 + c$ avec a, b, c des réels (vérifier que $a + b + c = -4$). Déterminer alors en justifiant une autre écriture des racines de P .
3. Déduire avec soin des résultats précédents les valeurs exactes de $\tan \frac{\pi}{5}$ et $\tan \frac{2\pi}{5}$ (on donnera les résultats sous la forme $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ avec a, b, c des entiers).

Exercice 4 (Un équivalent) On pose

$$f(x) = \frac{(6x^4 - 5x + 2) \ln(x+1)}{e^{-x} + \sin x + \ln(x^3)}.$$

1. Démontrer que $\ln(x)$ est équivalent à $\ln(1+x)$ au voisinage de $+\infty$. Cet équivalent est-il vrai au voisinage de 0 ?
2. Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $f(x)$.
3. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x)$.

Exercice 5 (Polynômes à coefficients dans $\{-1, 1\}$) Soit P un polynôme dont les coefficients valent ± 1 . Le but de l'exercice est de démontrer que les racines complexes de P ont un module compris entre $1/2$ et 2 .

On rappelle qu'un nombre complexe a est une racine de P si $P(a) = 0$.

1. Exemples :

(a) Donner les racines complexes de $P = X^2 - X - 1$.

(b) Donner les racines complexes de $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Jusqu'à la fin de l'exercice, on pose

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n.$$

avec $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels qui valent ± 1 .

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

(a) Démontrer que

$$|a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n| \leq \frac{|z|}{1 - |z|}.$$

(b) En déduire que si z est une racine de P , on a $|z| \geq \frac{1}{2}$.

3. On suppose cette fois-ci que z est une racine de P avec $|z| > 1$.

Démontrer que $\frac{1}{z}$ est racine du polynôme $Q = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$, en déduire que $|z| \leq 2$.

4. Un peu de dénombrement

(a) Combien y-a-t-il de polynômes à coefficients dans $\{-1, 1\}$ de degré n ?

(b) Combien y-a-t-il de polynômes à coefficients dans $\{-1, 1\}$ de degré 10 ayant exactement 3 coefficients égaux à $+1$?

Fin de l'énoncé