الجذع المشترك العلمي والتكنلوجي	الحدوديـــــــات حل مقترح	سلسلة 1

تمرين1 :

$P(x)=(x+1)(x-8)+(x-3)^2$

$P(x)=x^2-8x+x-8+x^2-6x+9$

$P(x)=2x^2-13x+1$

منه: $d^\circ P=2$

$Q(x)=2x^2(x+1)-(2x-1)(x^2+1)$

$Q(x)=2x^3+2x^2-(2x^3+2x-x^2-1)$

$Q(x)=2x^3+2x^2-2x^3-2x+x^2+1$

$Q(x)=3x^2-2x+1$

منه: $d^\circ Q=2$

$H(x)=(x+2)^3+x^4-(x^2-1)^2$

$H(x)=x^3+6x^2+12x+8+x^4-(x^4-2x^2+1)$

$H(x)=x^3+6x^2+12x+8+x^4-x^4+2x^2-1$

$H(x)=x^3+8x^2+12x+7$

منه: $d^\circ H=3$

$G(x)=x(2+5x)(x-\sqrt{2})$

$G(x)=(2x+5x^2)(x-\sqrt{2})$

$G(x)=2x^2-2\sqrt{2}x+5x^3-5\sqrt{2}x^2$

$G(x)=5x^3+(2-5\sqrt{2})x^2-2\sqrt{2}x$

منه: $d^\circ G=3$

انتبه وضع أقواسا قبل كل نشر مسبوق برمز ، وتذكر المتطابقات الإضافية: $(a+b)^3=a^3+3ba^2+3ab^2+b^3$ و $(a-b)^3=a^3-3ba^2+3ab^2-b^3$

تمرين2 : a و b و c أعداد حقيقية

1

$(a-3)x^2+(1-b)x+8=(x-1)^2+5(x+c)+7$

لدينا : $(a-3)x^2+(1-b)x+8=x^2-2x+1+5x+5c+7$

$(a-3)x^2+(1-b)x+8=x^2+3x+(5c+8)$

منه: $\begin{cases}a-3=1\\1-b=3\\8=5c+8\end{cases}$ منه: $\begin{cases}a=4\\-b=2\\5c=0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}a=4\\b=-2\\c=0\end{cases}$

2

لدينا : $(x+5)(3x+4)+ax^2=3bx+5c$

$3x^2+4x+15x+20+ax^2=3bx+5c$

$(3+a)x^2+19x+20=3bx+5c$

منه: $\begin{cases}3+a=0\\19=3b\\20=5c\end{cases}$ منه: $\begin{cases}a=-3\\b=\frac{19}{3}\\c=\frac{20}{4}=5\end{cases}$

3

لدينا :

$a(x+2)^2+b(x+2)+c=2x^2+9x+10$

$a(x^2+4x+4)+bx+2b+c=2x^2+9x+10$

$ax^2+4ax+4a+bx+2b+c=2x^2+9x+10$

$ax^2+(4a+b)x+(4a+2b+c)=2x^2+9x+10$

منه: $\begin{cases}a=2\\4a+b=9\\4a+2b+c=10\end{cases}$ منه: $\begin{cases}a=23\\8+b=9\\8+2b+c=10\end{cases}$ أي: $\begin{cases}a=2\\b=1\\8+2+c=10\end{cases}$ بالتالي: $\begin{cases}a=2\\b=1\\c=0\end{cases}$

لإيجاد الأعداد المطلوبة يكفي نشر وترتيب الحدوديات ثم استنتاج تساوي المعاملات التي من نفس الدرجة

تمرين3 : $P(x)=x^3+6x^2-x-30$

1

$P(0)=0+0-0-30=-30$ ، $P(1)=1+6-1-30=-24$ ، $P(2)=8+24-2-30=0$

$P(-1)=-1+6+1-30=-24$ ، $P(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+12-\sqrt{2}-30=\sqrt{2}-18$

2 بما أن $P(2)=0$ فإن 2 هو جذر للحدودية $P(x)$

3 لإيجاد الحدودية $Q(x)$ ننجز القسمة الإقليدية لـ $P(x)$ على $x-2$

فنجد أن : $Q(x)=x^2+8x+15$

x^3+6x^2-x-30	$x-2$
x^3-2x^2	$x^2+8x+15$
$0\quad 8x^2-x$	
$8x^2-16x$	
$0\quad 15x-30$	
$15x-30$	
0	

4 لدينا : $Q(-3)=9-24+15=0$ إذن -3 جذر للحدودية $Q(x)$

ننجز القسمة الإقليدية لـ $Q(x)$ على $x+3$

فنجد أن : $Q(x)=(x+3)(x+5)$

$x^2+8x+15$	$x+3$
x^2+3x	$x+5$
$5x+15$	
$5x-15$	
0	

5 لدينا : $P(x)=(x-2)Q(x)=(x-2)(x+3)(x+5)$

6 لدينا : $P(x)=0$ يعني : $(x-2)(x+3)(x+5)=0$

$x-2=0$ أو $x+3=0$ أو $x+5=0$ أي $x=2$ أو $x=-3$ أو $x=-5$

بالتالي : $S=\{2,-3,-5\}$

استعملنا القواعد التالية : $\sqrt{x^2}=|x|$ و $x\le 0$ إذا كان $|x|=-x$ و $x\ge 0$ إذا كان $|x|=x$

تمرين4 : $P(x)=4x^3-3x+1$ و $R(x)=4x^3-3x-1$

أ) لدينا : $P(-1)=-4+3+1=0$ إذن -1 جذر للحدودية $P(x)$ إذن فهي تقبل القسمة على $x+1$

1 ب) لإيجاد الحدودية $Q(x)$ ننجز القسمة الإقليدية لـ $P(x)$ على $x+1$

فنجد أن : $Q(x)=4x^2-4x+1$

$4x^3+0x^2-3x+1$	$x+1$
$4x^3+4x^2$	$4x^2-4x+1$
$0\quad -4x^2-3x$	
$-4x^2-4x$	
$0\quad x+1$	
$x+1$	
0	

2 لدينا : $R(x)=4x^3-3x-1=4x^3+4x^2+x-4x^2-4x-1=(x-1)(4x^2+4x+1)=(x-1)(2x+1)^2$

3 لدينا :

$P(x)=(x+1)(4x^2-4x+1)=(x+1)(2x-1)^2$

منه : $P(x)=0$ تعني : $(x+1)(2x-1)^2=0$

أي : $x+1=0$ أو $2x-1=0$

أي : $x=-1$ أو $x=\frac{1}{2}$

لدينا : $R(x)=(x-1)(2x+1)^2$

منه : $R(x)=0$ تعني : $(x-1)(2x+1)^2=0$

أي : $x-1=0$ أو $2x+1=0$

أي : $x=1$ أو $x=-\frac{1}{2}$

بالتالي: $S=\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$ | بالتالي: $S=\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$

لنحل في IR المتراجحة: $P(x)\geq 0$ أي: $(x+1)(2x-1)^2\geq 0$

بما أننا نعلم أن الحدودية $(2x-1)^2$ موجبة و تنعدم في $\frac{1}{2}$

فإن المتراجحة: $(x+1)(2x-1)^2\geq 0$ تعني: $x=\frac{1}{2}$ أو $(x+1)\geq 0$ أي: $x=\frac{1}{2}$ أو $x\geq -1$

بالتالي: $S=[-1,+\infty[\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}=[-1,+\infty[$ (لأن: $\frac{1}{2}\in[-1,+\infty[$)

4

الطريقة العامة لحل متراجحات من الدرجة الثانية فأكثر تتطلب جدول الإشارات، لكن في هذه الحالة و لكون أحد العوامل موجب فهي طريقة أسهل لكنها لن تكون مفيدة في حالات أخرى، لذلك سيتم حل المتراجحة الموالية عن طريق جدول الإشارات لاستفادة أكبر.

لنحل في IR المتراجحة: $R(x)\leq 0$ أي: $(x-1)(2x+1)^2\leq 0$ ،لدينا:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	-		-	0		+
$(2x+1)^2$	+	0	+			+
$(x-1)(2x+1)^2$	-	0	-	0		+

بالتالي: $S=]-\infty,1]$

المتفاوتة $-1\leq 4x^3-3x\leq 1$ تعني: $-1\leq 4x^3-3x$ و $4x^3-3x\leq 1$ أي: $4x^3-3x+1\geq 0$ و $4x^3-3x-1\leq 0$

أي: $P(x)\geq 0$ و $R(x)\leq 0$ بالتالي: $x\in[-1,+\infty[$ و $x\in]-\infty,1]$

5

أي: $]-\infty,1]\cap[-1,+\infty[$ أي: $x\in]-\infty,1]$ بالتالي: $S=[-1,1]$ أي: $x\in[-1,1]$

استعملنا القواعد التالية: $|x|=x$ إذا كان $x\geq 0$ و $|x|=-x$ إذا كان $x\leq 0$ و $\sqrt{x^2}=|x|$

تمرين 5: $P(x)=x^3-6x^2+10x-4$

1

$x^3-6x^2+10x-4$	$x-2$
x^3-2x^2	x^2-4x+2
$0\quad -4x^2+10x$	
$-4x^2+8x$	
$0\quad +2x-4$	
$2x-4$	
0	

2 لدينا: $P(x)-2(2-x)=x^3-6x^2+10x-4-4+2x=x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^2$

3 لنحل في IR المتراجحة: $|P(x)-2(2-x)|\leq 8\times 10^{-3}$

لدينا: $|P(x)-2(2-x)|\leq 8\times 10^{-3}$ تعني: $|(x-2)^3|\leq 2^3\times 0{,}1^3$ تعني: $|x-2|^3\leq 0{,}2^3$ تعني: $|x-2|\leq 0{,}2$

تعني أن: $-0{,}2\leq x-2\leq 0{,}2$ تعني: $2-0{,}2\leq x\leq 0{,}2+2$ أي: $1{,}8\leq x\leq 2{,}2$ بالتالي: $S=[1{,}8\ ;\ 2{,}2]$

4 بما أن: $1{,}845\in[1{,}8\ ;\ 2{,}2]$ فإنها تحقق المتفاوتة السابقة ، منه: $|P(1{,}845)-2(2-1{,}845)|\leq 8\times 10^{-3}$

أي: $|P(1{,}845)-0{,}31|\leq 8\times 10^{-3}$ ، وهذا يعني أن $0{,}31$ هي قيمة مقربة للعدد $P(1{,}845)$ إلى 8×10^{-3}

استعملنا في السؤال 5 خاصية مقبولة: إذا كان $a^3\leq b^3$ فإن: $a\leq b$.

تمرين6 : ـ مزيدا من التفكير ـ

1

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=x(x+3)(x+1)(x+2)+1=(x^2+3x)(x^2+2x+x+2)+1$$

لدينا، $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1$

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$$

2

حسب السؤال السابق إذا كان n عدد صحيح طبيعي فإن الأعداد التي تليه هي $n+1$ و $n+2$ و $n+3$

وبذلك يكون جذاؤها بعد إضافة 1 هو $(n^2+3n+1)^2$ والذي يمثل مربع عدد صحيح طبيعي.