AlloSchool

Mathématiques : 1Bac SM

Séance 18-1 : Produit vectoriel dans l'espace (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

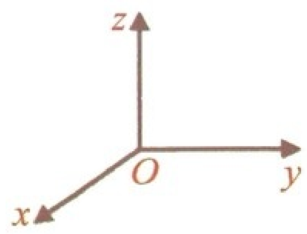
I- Orientation de l'espace

1-1/ Trièdre

Définition

Trois demi-droites $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ de même origine O et non coplanaires déterminent, dans cet ordre un trièdre que l'on le note $(Ox; Oy; Oz)$.

$[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ sont appelées les arêtes du trièdre $(Ox; Oy; Oz)$

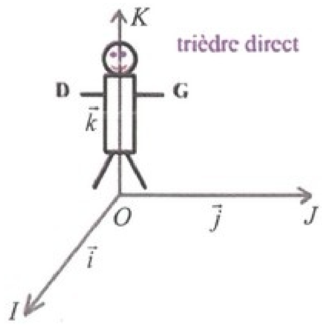


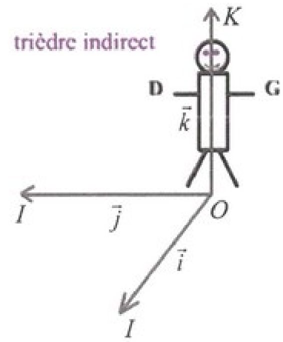
1-2/ Bonhomme d'ampère - Repère orienté de l'espace

Soit $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$.

On pose : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{k}$.

- On dit que le repère $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\right)$ est direct lorsque le trièdre $([OI); [OJ); [OK))$ est direct.
- On dit que l'espace $\mathscr{E}$ est orienté positivement lorsqu'il est muni d'un repère direct.





Proposition

Si le repère $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\right)$ est orthonormal direct, alors :

1) Les repères $\left(O; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\,; \overrightarrow{i}\right)$ et $\left(O; \overrightarrow{k}\,; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$ sont directs.

2) Les repères $\left(O; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{k}\right)$, $\left(O; \overrightarrow{k}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{i}\right)$ et $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{k}\,; \overrightarrow{j}\right)$ sont indirects.

3) Les repères $\left(O; -\overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\right)$, $\left(O; \overrightarrow{i}\,; -\overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\right)$ et $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; -\overrightarrow{k}\right)$ sont indirects.

Remarque

Soit O un point quelconque de l'espace $\mathscr{E}$. Alors :

$\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\right)$ est un repère direct⇔La base $\left(\overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\right)$ est directe.

II- Produit vectoriel de Deux vecteur

2-1/ Définition du produit vectoriel

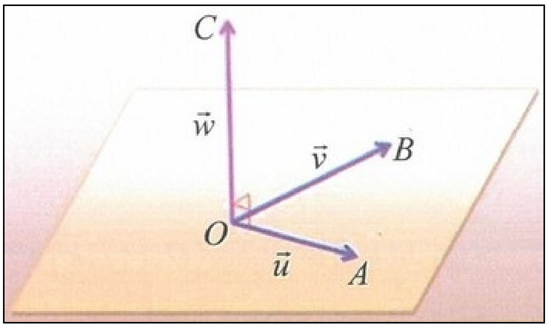
Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OB}$.

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, dans cet ordre, noté $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, est le vecteur $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{OC}$ défini par :

- la droite (OC) est perpendiculaire au plan (OAB) ;
- le trièdre $([OA);[OB);[OC))$ est direct ;
- $||\overrightarrow{OC}||=||\overrightarrow{OA}||\times||\overrightarrow{OB}||\times\sin\theta$ où $\theta=\widehat{AOB}$

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors : $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$



Remarques

- Le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne dépend pas du choix du point O.

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur, tandis que le produit scalaire de deux vecteurs est un réel.

- Si $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, alors $\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{v}$ et $||\overrightarrow{w}||=||\overrightarrow{u}||\times||\overrightarrow{v}||\times\left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)\right|$.

- Si $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, alors la base $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)$ est directe. En particulier, si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont unitaires et orthogonaux, alors $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)$ est une base orthonormée directe.

- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}\in\mathscr{V}_3$: $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$

- Les points A, B et C de l'espace $\mathscr{E}$ sont alignés si, et seulement si : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$

Applications

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que $||\overrightarrow{u}||=\sqrt{2}$ et $||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}||=4$ et $\left(\overline{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

1)Calculer $||\overrightarrow{v}||$.

Soit $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que $||\overrightarrow{a}|| = 4$ et $||\overrightarrow{b}|| = 9$ et $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 18\sqrt{3}$.

2. Calculer $||\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}||$.

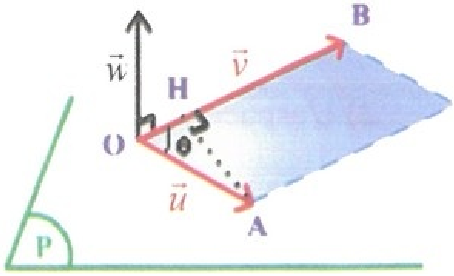
2-2/ Interprétation géométrique du produit vectoriel

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

Le réel $||\overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}||$ est l'aire du parallélogramme construit sur les représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

En effet : $AH = OA \sin\theta = ||\overrightarrow{u}|| \times \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}}\right)\right|$

Et l'aire du parallélogramme est : $OB \times AH = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}}\right)\right|$



III- Propriétés du produit vectoriel

3-1/ Anti-symétrie du produit vectoriel

Proposition

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace orienté, on a : $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$

On dit que le produit vectoriel est antisymétrique.

3-2/ Bilinéarité du produit vectoriel

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace orienté et α un nombre réel.

Alors :

$$\boxed{1}\ \overrightarrow{u} \wedge \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$$

$$\boxed{2}\ \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$$

$$\boxed{3}\ \overrightarrow{u} \wedge \left(\alpha \overrightarrow{v}\right) = \left(\alpha \overrightarrow{u}\right) \wedge \overrightarrow{v} = \alpha\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right)$$

On dit que le produit vectoriel est bilinéaire.

3-3/ Expression analytique du produit vectoriel

L'espace $\mathscr{V}_3$ est rapporté à une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

Soit $\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace $\mathscr{V}_3$.
Alors :

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$

Applications

On considère les vecteurs :
$\overrightarrow{u}=2\,\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\,\overrightarrow{k}\ ;\ \overrightarrow{w}=\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$

1. Déterminer, dans la base $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$, les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}$.

Dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$, on considère les points :

$$A\,(1;2;3)\ \ ;\ \ B\,(0;-1;2)\ \ ;\ \ C\,(3;-2;1)$$

2. Calculer $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}$.

IV- Applications du produit vectoriel

4-1/ Aire d'un triangle

Proposition

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathscr{E}$.

L'aire du triangle ABC est : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\,||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||$

Applications

1. Calculer l'aire du triangle ABC dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ A\,(-1;2;1)\ \ ;\ \ B\,(-1;0;2)\ \ ;\ \ C\,(2;-1;0)$$
$$\boxed{2}\ A\,(2;1;-1)\ \ ;\ \ B\,(0;4;1)\ \ ;\ \ C\,(3;1;-2)$$

4-2/ Équation d'un plan défini par trois points non alignés

Proposition

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathscr{E}$.

On a : $M\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

Applications

On considère les deux points $E\,(3;-1;1)$ et $F\,(1;0;3)$.

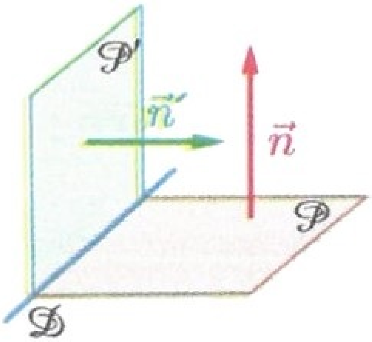
1. Déterminer une équation cartésienne du plan (OEF).

4-3/ Intersection de deux plans de l'espace

Proposition

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' deux plans sécants suivant une droite $\mathscr{D}$ dans l'espace orienté .

Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{n'}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$', alors $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection $\mathscr{D}$.



Applications

1. Déterminer l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ \mathscr{P}\ :\ x-y+2z+3=0\ \ et\ \ \mathscr{P}'\ :\ x+2y+2z-1=0$$
$$\boxed{2}\ \mathscr{P}\ :\ 3x-4y+5z+7=0\ \ et\ \ \mathscr{P}'\ :\ 2x-3y-z-4=0$$

4-4/ Distance d'un point à une droite

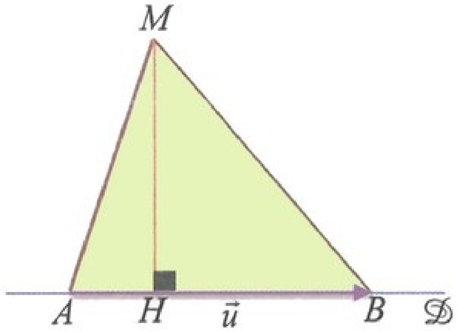
Proposition

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}\ ; \overrightarrow{j}\ ; \overrightarrow{k}\right)$.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A et dirigée parle vecteur $\overrightarrow{u}$.

La distance d'un point M de l'espace à la droite $\mathscr{D}$ est donnée par :

$$d\left(M;\mathscr{D}\right)=\frac{||\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}||}{||\overrightarrow{u}||}$$



Applications

1. Calculer la distance du point M à la droite $\mathscr{D}$ dans chacun des cas suivants :

$\boxed{1}$ $M\,(3;2;1)$ *et* $\mathscr{D}$: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\boxed{2}$ $M\,(3;-1;1)$ *et* $\mathscr{D}$: $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$