AlloSchool

Mathématiques : 1Bac SM

Séance 17-1 : Produit scalaire dans l'espace (Cours)

**Professeur : Mr CHEDDADI Haitam**

Sommaire

I- Produit scalaire dans l'espace

1-1/ Définitions et notations

1-2/ Orthogonalité de deux vecteurs

1-3/ Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

1-4/ Norme d'un vecteur de l'espace

II- Étude analytique du produit scalaire

2-1/ Base orthonormale - Repère orthonormal

2-2/ Expression analytique du produit scalaire

2-3/ Ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = k$

III- Plan défini par un point et un vecteur normal

3-1/ Vecteur normal à un plan

3-2/ Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

3-3/ Parallélisme et orthogonalité

3-4/ Distance d'un point à un plan de l'espace

IV- La sphère dans l'espace

4-1/ Définition

4-2/ Équation cartésienne d'une sphère

4-3/ Représentation paramétrique d'une sphère

4-4/ Ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

4-5/ Ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

4-6/ Intersection d'une sphère et d'une droite

4-7/ Intersection d'une sphère et d'un plan

# I- Produit scalaire dans l'espace

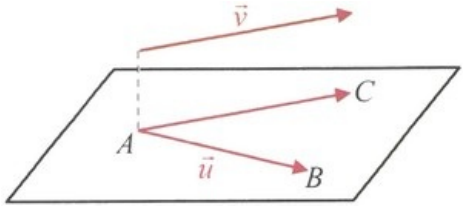
## 1-1/ Définitions et notations

### Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et $A$, $B$ et $C$ trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $(ABC)$ si $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés, ou dans tout plan comprenant $A$, $B$ et $C$, on le note : $\vec{u}.\vec{v}$

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on convient que : $\vec{u}.\vec{v} = 0$

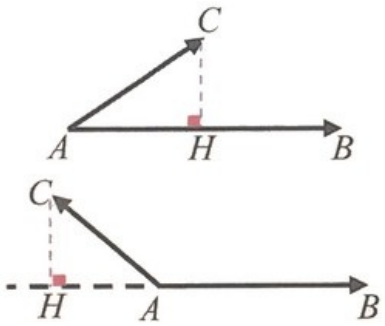



### Remarques

Soit $H$ le projeté orthogonal du point $C$ sur la droite $(AB)$.

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$, cela correspond au cas où l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est aigu.

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens contraires, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$, cela correspond au cas où l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est obtus.




Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan restent valables dans l'espace.

### Applications

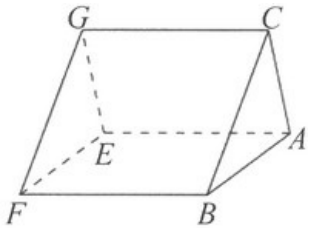
Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AE = 5$, $AB = 8$ et $AD = 6$.

1. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BG}$ ; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HF}$ ; $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DG}$

Soit $ABCEFG$ un prisme droit tel que le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

On suppose que $AC = 3$ et $AB = 4$ et $AE = 8$.

2. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$ ; $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{AF}$ ; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{EG}$




## 1-2/ Orthogonalité de deux vecteurs

### Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

On écrit : $\vec{u} \perp \vec{v}$

## 1-3/ Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

### Proposition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathscr{V}_3$ et $k$ un nombre réel.

On a les propriétés suivantes :

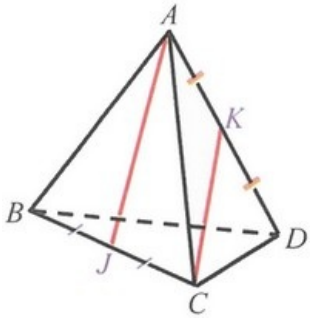
$$\boxed{1}\ \vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$
$$\boxed{2}\ \left(k\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}.\left(k\vec{v}\right) = k\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$$
$$\boxed{3}\ \vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

On dit que le produit scalaire est une opération symétrique et bilinéaire.

### Applications

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier dont toutes les arêtes ont la même longueur $a$.

Soit $J$ et $K$ les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AD]$ :




1. Calculer $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$, puis en déduire $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$, et en déduire $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{CK}$ en fonction de $a$.

## 1-4/ Norme d'un vecteur de l'espace

### Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

Le produit scalaires $\vec{u}.\vec{u}$ s'appelle le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$, et se note $\vec{u}^2$.

Le nombre réel positif $\sqrt{\vec{u}^2}$ est appelé la norme du vecteur $\vec{u}$, et on écrit : $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}^2}$

### Remarque

En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on a : $\vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2$

### Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathscr{V}_3$ et $k$ un nombre réel.

On a :

1) $||\overrightarrow{u}|| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

2) $||k.\overrightarrow{u}|| = |k|.||\overrightarrow{u}||$

3) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)$

4) Inégalité triangulaire : $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$

5) Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right| \leq ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$

6) Identités remarquables :

$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$$
$$||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$$
$$||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2 = \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right).\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right)$$

# II- Étude analytique du produit scalaire

## 2-1/ Base orthonormale - Repère orthonormal

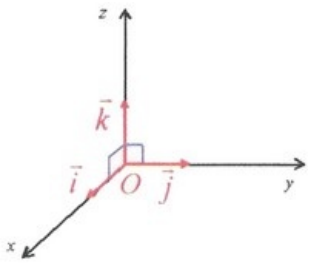
### Définition

Soit $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$.

- On dit que la base $\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ est orthonormale (ou orthonormée) lorsque :

$$\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{k} = 0 \text{ et } ||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}|| = ||\overrightarrow{k}|| = 1$$

- On dit que le repère $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ est orthonormal (ou orthonormé) lorsque la base $\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ est orthonormale.




## 2-2/ Expression analytique du produit scalaire

### Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathscr{V}_3$.

Si $\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$, alors : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$ et $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Soit $A\,(x_A;y_A;z_A)$ et $B\,(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace $\mathscr{E}$.

Alors : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2 + (z_B-z_A)^2}$

### Applications

On considère les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{w} = (4-3m)\vec{i} + 5\vec{j} + (1-m)\vec{k}$ $(m \in \mathbb{R})$.

1. a- Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$ ; $\vec{u}.\vec{w}$ ; $\vec{v}.\vec{w}$ ; $||\vec{u}||$ ; $||\vec{v}||$
1. b- Déterminer la valeur de réel $m$ pour laquelle $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
1. c- Calculer $\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AB = AE = 2$ et $AD = 4$.

Soit $I$ le centre du carré $ABFE$ et $J$ le milieu du segment $[EH]$.

2. a- Vérifier que le repère $\left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}; \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}; \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ est orthonormé.
2. b- Déterminer, dans ce repère, les coordonnées des points $I$, $J$ et $G$.
2. c- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JG}$ et les distances $JI$ et $JG$.

## 2-3/ Ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$

### Proposition

Soit $\vec{u}\,(a;b;c)$ un vecteur non nul de l'espace $\mathscr{V}_3$, $A$ un point et $k$ un nombre réel.

L'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$ est un plan dont une équation cartésienne est de la forme :

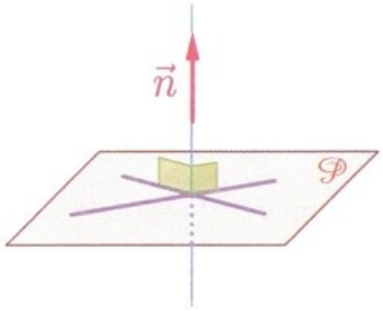
$$ax + by + cz + d = 0$$

# III- Plan défini par un point et un vecteur normal

## 3-1/ Vecteur normal à un plan

### Définition

Un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace est normal à un plan $\mathscr{P}$ lorsque toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$.



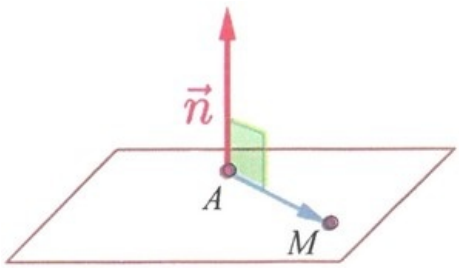

## 3-2/ Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

### Proposition

Soit $a$,$b$, $c$ et $d$ des nombres réels tels que $(a;b;c) \neq (0;0;0)$.

- Un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a;b;c)$ a une équation cartésienne de la forme :
$ax + by + cz + d = 0$

- Réciproquement, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\,(a;b;c)$.




### Applications

1. Déterminer un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ \mathscr{P}\ :\ 2x-y+8z-1=0$$
$$\boxed{2}\ \mathscr{P}\ :\ 3x-2z+10=0$$
$$\boxed{3}\ \mathscr{P}\ :\ 2y+3=0$$

2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q}$ passant par $B\,(-1;0;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(2;-3;4)$.

On considère les points $A\,(1;-1;1)$, $B\,(0;2;-1)$ et $C\,(-1;1;0)$.

3. a- Vérifier que les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.

3. b- Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1;3;4)$ est normal au plan $(ABC)$.

## 3-3/ Parallélisme et orthogonalité

### Proposition

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' deux plans et $\mathscr{D}$ une droite dans l'espace.

Soit $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ deux vecteurs normaux respectivement à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$', et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

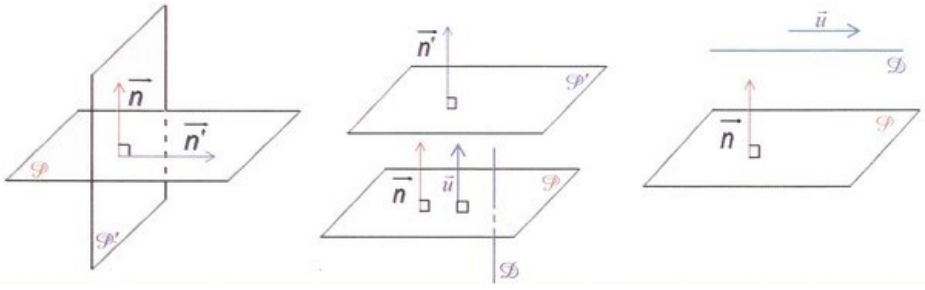
Alors :

1) Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.

2) Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' sont orthogonaux si, et seulement si, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.

3) La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

4) La droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.




### Applications

On considère les deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ définis par les équations cartésiennes :

$$\mathscr{P} \ : \ 2x - 3y + z + 1 = 0$$
$$\mathscr{Q} \ : \ (m-1)x + 2y + (2m-3)z + 7 = 0$$

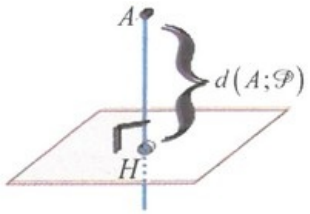
1. Déterminer la valeur de $m$ qui pour laquelle les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont orthogonaux.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$' passant par $A\,(-1;-1;0)$ et parallèle au plan $\mathscr{P}$.

## 3-4/ Distance d'un point à un plan de l'espace

### Définition

Soit $\mathscr{P}$ un plan et $A$ un point de l'espace.

La distance du point $A$ au plan $\mathscr{P}$, notée $d\,(A;\mathscr{P})$, est la distance $AH$ où $H$ est le projeté orthogonal de $A$ sur $\mathscr{P}$ : $d\,(A;\mathscr{P}) = AH$




La distance du point $A\,(x_A;y_A;z_A)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule suivante :

$$d\,(A;\mathscr{P}) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

### Applications

On considère les plans $\mathscr{P} \ : \ x + y - z + 1 = 0$ et $\mathscr{Q} \ : \ 2x + y + 2z - 3 = 0$.

1. a- Calculer $d\,(A;\mathscr{P})$ et $d\,(A;\mathscr{Q})$ sachant que $A\,(2;1;-1)$.
1. b- Déterminer l'ensemble des points $M$ de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $d\,(M;\mathscr{P}) = d\,(M;\mathscr{Q})$.

On considère les points $A\,(1;-1;2)$ et $B\,(2;0;1)$, et les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ donnés par les équations :

$$\mathscr{P} \ : \ x + y - z - 1 = 0 \text{ et } \mathscr{Q} \ : \ 2x + y - z + 1 = 0$$

2. a- Calculer la distance du point $A$ au plan $\mathscr{P}$.
2. b- Montrer que le point $H\,(2;0;1)$ est le projeté orthogonal du point $A$ sur le plan $\mathscr{P}$.
2. c- Calculer $d\,(A;\mathscr{Q})$. Que peut-en déduire ?

On considère dans l'espace $\mathscr{E}$ le point $A\,(-1;1;1)$ et plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne :
$2x - y + z - 2 = 0$

3. a- Déterminer les coordonnées du point $H$ projeté orthogonal du point $A$ sur le plan $\mathscr{P}$.

Pour tout réel $m$, on pose : $\mathscr{Q}_m = \left\{ M \in \mathscr{E} / \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AH} = m \right\}$

3. b- Déterminer analytiquement l'ensemble $\mathscr{Q}_m$.
3. c- Déterminer m tel que $d\,(A;\mathscr{Q}_m) = d\,(A;\mathscr{P})$

# IV- La sphère dans l'espace

## 4-1/ Définition

### Définition

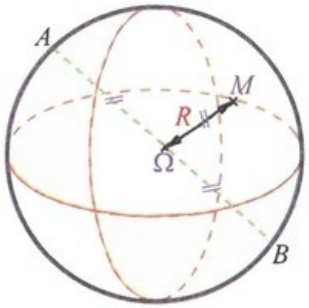
Soit $\Omega$ un point de l'espace et $R$ un réel positif.

La sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega$ et de rayon $R$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que : $\Omega M = R$

On la note : $S(\Omega; R)$

Soit $A$ et $B$ deux points de la sphère $\mathscr{S}$.

Le segment $[AB]$ est appelé diamètre de la sphère $\mathscr{S}$ lorsque le centre $\Omega$ de la sphère $\mathscr{S}$ est le milieu du segment $[AB]$.




## 4-2/ Équation cartésienne d'une sphère

### Proposition

Soit $R$ un réel positif et $\Omega(a; b; c)$ un point de l'espace.

Une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega$ et de rayon $R$ est donnée par :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

### Applications

1. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega$ et de rayon $R$ dans les cas suivants :

$$\boxed{1}\ \Omega(2; 0; -1) \text{ et } R = \sqrt{2}$$
$$\boxed{2}\ \Omega(-3; 1; -2) \text{ et } R = \frac{3}{2}$$

## 4-3/ Représentation paramétrique d'une sphère

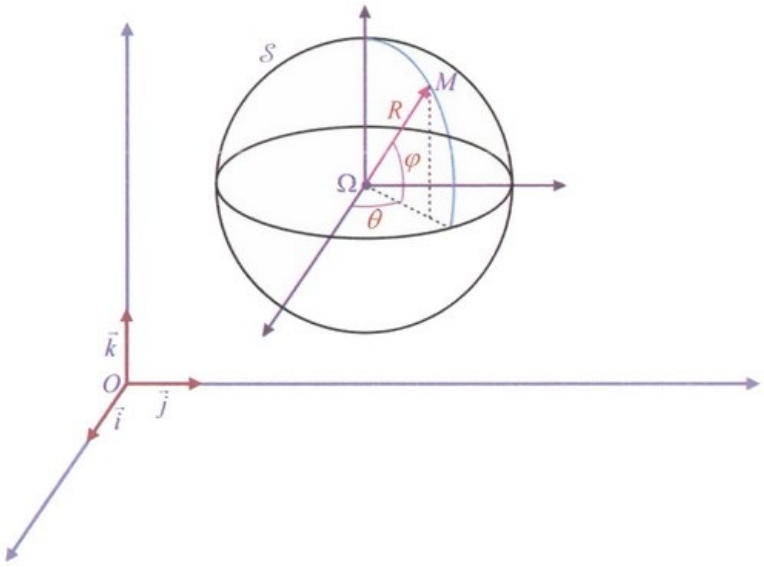
### Proposition

Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon $R$.

Le point $M(x; y; z)$ appartient à la sphère $\mathscr{S}$ si, est seulement si :

$$\begin{cases} x = a + R\sin\varphi.\cos\theta \\ y = b + R\sin\varphi.\sin\theta \quad (\varphi;\theta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = c + R\cos\varphi \end{cases}$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique de la sphère $\mathscr{S}$.




### Applications

1. Déterminer une représentation paramétrique de la sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$.

## 4-4/ Ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

### Proposition

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que :

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$$

où $a$, $b$, $c$ et $d$ des nombres réels.

1) Si $a^2+b^2+c^2-d>0$, alors $\mathscr{S}$ est la sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

2) Si $a^2+b^2+c^2-d=0$, alors : $\mathscr{S}=\{\Omega(a;b;c)\}$

3) Si $a^2+b^2+c^2-d<0$, alors : $\mathscr{S}=\emptyset$

## 4-4/ Ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

### Applications

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace $\mathscr{E}$ dans chacun des cas suivants :

$$\mathscr{S}_1 \ : \ x^2+y^2+z^2-4x+6y=0$$
$$\mathscr{S}_2 \ : \ x^2+y^2+z^2+x-3y+4z+\frac{13}{2}=0$$
$$\mathscr{S}_3 \ : \ x^2+y^2+z^2-x-3y+2z-\frac{7}{2}=0$$
$$\mathscr{S}_4 \ : \ x^2+y^2+z^2+x-3y-2z+9=0$$

## 4-5/ Ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

### Proposition

Soit $A$ et $B$ deux points distincts de l'espace $\mathscr{E}$.

1) L'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$ .

2) Une équation cartésienne de la sphère  est donnée par :

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

### Applications

On Applications considère dans l'espace $\mathscr{E}$ les points suivants :

$$A(2;0;1)\ ;\ B(1;-1;1)\ ;\ C(0;0;-1)$$

1. a- Déterminer une équation cartésienne de la sphère  de diamètre $[AB]$.
1. b- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$. Que peut-en déduire ?
2. a- Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[AC]$.
2. b- En déduire le centre et le rayon de la sphère $\mathscr{S}$.

## 4-6/ Intersection d'une sphère et d'une droite

### Proposition

Soit $\mathscr{S}(\Omega;R)$ une sphère et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace $\mathscr{E}$.

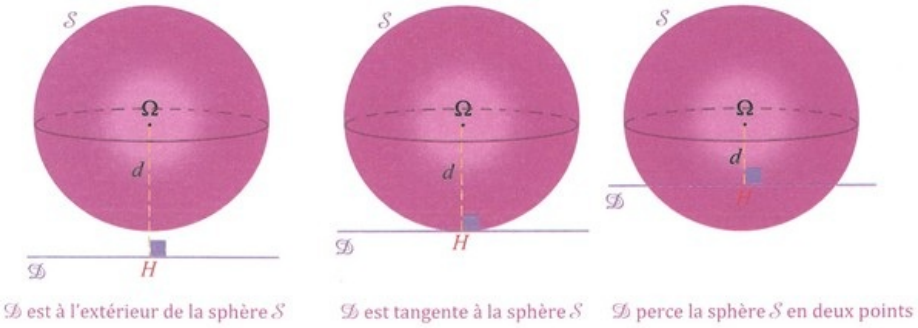
On désigne par $d$ la distance du point $\Omega$ à la droite $\mathscr{D}$, et $H$ le projeté orthogonal de $\Omega$ sur $\mathscr{D}$.

On a les propriétés suivantes :

1) Si $d>R$, alors $\mathscr{D}\cap\mathscr{S}=\emptyset$. On dit que la droite $\mathscr{D}$ est à l'extérieur de la sphère $\mathscr{S}$.

2) Si $d=R$, alors $\mathscr{D}\cap\mathscr{S}=\{H\}$. On dit que la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la sphère $\mathscr{S}$ au point $H$.

3) Si $d<R$, alors $\mathscr{D}\cap\mathscr{S}=\{A,B\}$. On dit que la droite $\mathscr{D}$ est perce la sphère $\mathscr{S}$ aux points $A$ et $B$.




## 4-7/ Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit $\mathscr{S}(\Omega;R)$ une sphère et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace $\mathscr{E}$.

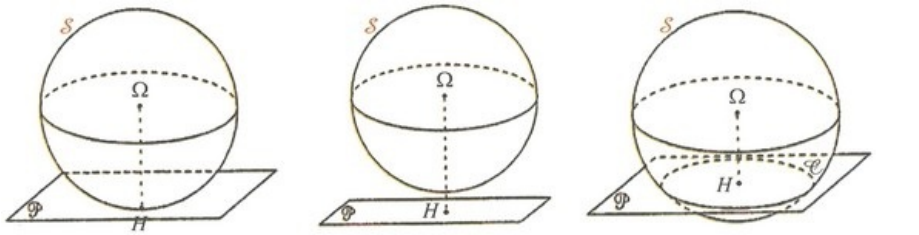
On désigne par $d$ la distance du point $\Omega$ au plan $\mathscr{P}$, et $H$ le projeté orthogonal de $\Omega$ sur $\mathscr{P}$.

On a les propriétés suivantes :

1) Si $d>R$, alors $\mathscr{P}\cap\mathscr{S}=\emptyset$. On dit que le plan $\mathscr{P}$ est à l'extérieur de la sphère $\mathscr{S}$.

2) Si $d=R$, alors $\mathscr{P}\cap\mathscr{S}=\{H\}$. On dit que le plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère $\mathscr{S}$ au point $H$.

3) Si $d < R$, alors $\mathscr{P} \cap \mathscr{S} = \mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $H$ et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. On dit que le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ selon le cercle $\mathscr{C}\left(H; \sqrt{R^2 - d^2}\right)$.




$\mathscr{P}$ est tangente à la sphère $\mathscr{S}$ $\mathscr{P}$ est à l'extérieur de la sphère $\mathscr{S}$ $\mathscr{P}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ suivant un cercle $\mathscr{C}$

### Applications

1. Étudier l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ dans chacun des cas suivants :

$\boxed{1}$ $\mathscr{S}$ : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ *et* $\mathscr{P}$ : $x - 2y + 2z - 3 = 0$

$\boxed{2}$ $\mathscr{S}$ : $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$ *et* $\mathscr{P}$ : $x - 2y + 2z - 3 = 0$

$\boxed{3}$ $\mathscr{S}$ : $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 7 = 0$ *et* $\mathscr{P}$ : $x + y + z - 4 = 0$

$\boxed{4}$ $\mathscr{S}$ : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 1 = 0$ *et* $\mathscr{P}$ : $x - 2y + 2z + 1 = 0$

$\boxed{5}$ $\mathscr{S}$ : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 1 = 0$ *et* $\mathscr{P}$ : $2x + y + z = 0$

2. Donner une équation de la sphère de centre $\Omega(-1; 2; 3)$ et tangente au plan $\mathscr{P}$ d'équation : $x - 2y + 2z + 1 = 0$

## 4-7/ Intersection d'une sphère et d'un plan

### Proposition

Soit $\mathscr{S}$ une sphère de centre $\Omega$ et soit $A \in \mathscr{S}$.

Il existe un seul plan $\mathscr{P}$ tangent à la sphère $\mathscr{S}$ en $A$, il est défini par :

$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$M(x; y; z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (x_\Omega - x_A)(x - x_A) + (y_\Omega - y_A)(y - y_A) + (z_\Omega - z_A)(z - z_A) = 0$$