

Sommaire**I- Produit scalaire dans l'espace**

1-1/ Définitions et notations

1-2/ Orthogonalité de deux vecteurs

1-3/ Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

1-4/ Norme d'un vecteur de l'espace

II- Étude analytique du produit scalaire

2-1/ Base orthonormale - Repère orthonormal

2-2/ Expression analytique du produit scalaire

2-3/ Ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$ **III- Plan défini par un point et un vecteur normal**

3-1/ Vecteur normal à un plan

3-2/ Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

3-3/ Parallélisme et orthogonalité

3-4/ Distance d'un point à un plan de l'espace

IV- La sphère dans l'espace

4-1/ Définition

4-2/ Équation cartésienne d'une sphère

4-3/ Représentation paramétrique d'une sphère

4-4/ Ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

4-5/ Ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

4-6/ Intersection d'une sphère et d'une droite

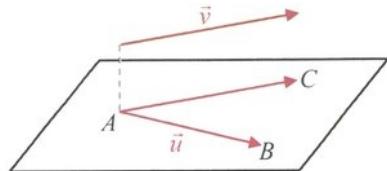
4-7/ Intersection d'une sphère et d'un plan

I- Produit scalaire dans l'espace**1-1/ Définitions et notations****Définition**

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace, et A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$.

- Si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls, le produit scalaire des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans l'espace est le produit scalaire des deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} dans le plan (ABC) si A , B et C ne sont pas alignés, ou dans tout plan comprenant A , B et C , on le note : $\vec{u} \cdot \vec{v}$

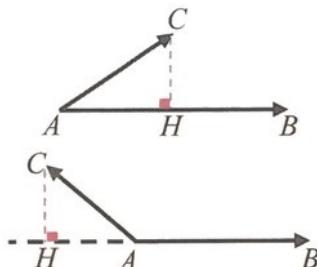
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on convient que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



Remarques

Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) .

- Si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} ont le même sens, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$, cela correspond au cas où l'angle géométrique \widehat{BAC} est aigu.
- Si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} ont des sens contraires, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$, cela correspond au cas où l'angle géométrique \widehat{BAC} est obtus.



Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan restent valables dans l'espace.

Applications

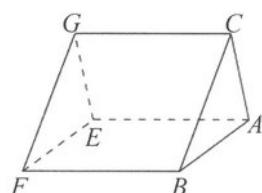
Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AE = 5$, $AB = 8$ et $AD = 6$.

1. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HF}$; $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG}$

Soit $ABCEFG$ un prisme droit tel que le triangle ABC est rectangle en A .

On suppose que $AC = 3$ et $AB = 4$ et $AE = 8$.

2. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EG}$



1-2/ Orthogonalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

On écrit : $\vec{u} \perp \vec{v}$

1-3/ Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Proposition

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace \mathbb{R}^3 et k un nombre réel.

On a les propriétés suivantes :

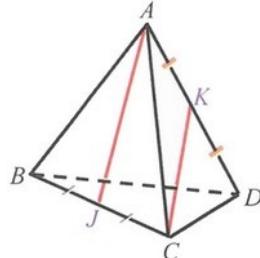
$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad & \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \boxed{2} \quad & (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ \boxed{3} \quad & \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

On dit que le produit scalaire est une opération symétrique et bilinéaire.

Applications

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier dont toutes les arêtes ont la même longueur a .

Soit J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AD]$:



1. Calculer $\vec{CB} \cdot \vec{CA}$ et $\vec{CB} \cdot \vec{CD}$, puis en déduire $\vec{CB} \cdot \vec{AD}$.
2. Calculer $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$, et en déduire $\vec{AJ} \cdot \vec{CK}$ en fonction de a .

1-4/ Norme d'un vecteur de l'espace

Définition

Soit \vec{u} un vecteur de l'espace.

Le produit scalaires $\vec{u} \cdot \vec{u}$ s'appelle le carré scalaire du vecteur \vec{u} , et se note \vec{u}^2 .

Le nombre réel positif $\sqrt{\vec{u}^2}$ est appelé la norme du vecteur \vec{u} , et on écrit : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

Remarque

En posant $\vec{u} = \vec{AB}$, on a : $\vec{u}^2 = \vec{AB}^2 = AB^2 = \|\vec{AB}\|^2$

Proposition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace \mathcal{V}_3 et k un nombre réel.

On a :

- 1) $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- 2) $\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$
- 3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$
- 4) Inégalité triangulaire : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
- 5) Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- 6) Identités remarquables :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \end{aligned}$$

II- Étude analytique du produit scalaire

2-1/ Base orthonormale - Repère orthonormal

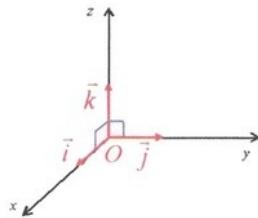
Définition

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace \mathcal{E} .

- On dit que la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est orthonormale (ou orthonormée) lorsque :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \text{ et } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

- On dit que le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est orthonormal (ou orthonormé) lorsque la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est orthonormale.



2-2/ Expression analytique du produit scalaire

Proposition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace \mathcal{V}_3 .

Si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace \mathcal{E} .

$$\text{Alors : } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Applications

On considère les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{w} = (4 - 3m)\vec{i} + 5\vec{j} + (1 - m)\vec{k}$ ($m \in \mathbb{R}$).

1. a- Calculer : $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $\vec{u} \cdot \vec{w}$; $\vec{v} \cdot \vec{w}$; $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{v}\|$
1. b- Déterminer la valeur de réel m pour laquelle \vec{u} et \vec{w} sont orthogonaux.
1. c- Calculer $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$.

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AB = AE = 2$ et $AD = 4$.

Soit I le centre du carré $ABFE$ et J le milieu du segment $[EH]$.

2. a- Vérifier que le repère $(A; \frac{1}{2}\vec{AB}; \frac{1}{4}\vec{AD}; \frac{1}{2}\vec{AE})$ est orthonormé.
2. b- Déterminer, dans ce repère, les coordonnées des points I , J et G .
2. c- Calculer le produit scalaire $\vec{JI} \cdot \vec{JG}$ et les distances JI et JG .

2-3/ Ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$

Proposition

Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace \mathcal{V}_3 , A un point et k un nombre réel.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$ est un plan dont une équation cartésienne est de la forme :

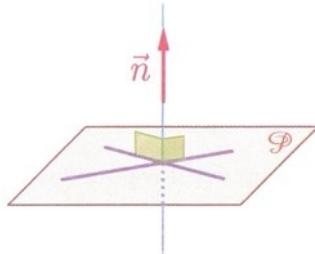
$$ax + by + cz + d = 0$$

III- Plan défini par un point et un vecteur normal

3-1/ Vecteur normal à un plan

Définition

Un vecteur \vec{n} non nul de l'espace est normal à un plan \mathcal{P} lorsque toute droite de vecteur directeur \vec{n} est perpendiculaire à \mathcal{P} .



3-2/ Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

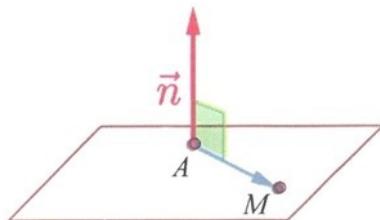
Proposition

Soit a, b, c et d des nombres réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

- Un plan de vecteur normal $\vec{n} (a; b; c)$ a une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

- Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n} (a; b; c)$.



Applications

1. Déterminer un vecteur normal au plan \mathcal{P} dans chacun des cas suivants :

- [1] $\mathcal{P} : 2x - y + 8z - 1 = 0$
- [2] $\mathcal{P} : 3x - 2z + 10 = 0$
- [3] $\mathcal{P} : 2y + 3 = 0$

2. Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{Q} passant par $B(-1; 0; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} (2; -3; 4)$.

On considère les points $A(1; -1; 1)$, $B(0; 2; -1)$ et $C(-1; 1; 0)$.

3. a- Vérifier que les points A , B et C ne sont pas alignés.

3. b- Montrer que le vecteur $\vec{n} (1; 3; 4)$ est normal au plan (ABC) .

3-3/ Parallélisme et orthogonalité

Proposition

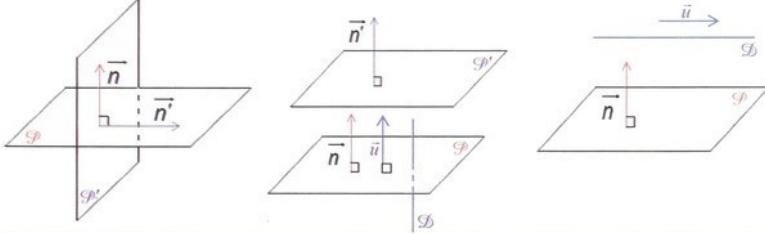
Soit \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans et \mathcal{D} une droite dans l'espace.

Soit \vec{n} et \vec{n}' deux vecteurs normaux respectivement à \mathcal{P} et \mathcal{P}' , et \vec{u} un vecteur directeur de \mathcal{D} .

Alors :

- 1) Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires.

- 2) Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont orthogonaux si, et seulement si, les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux.
- 3) La droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{P} si, et seulement si, les vecteurs \vec{n} et \vec{u} sont orthogonaux.
- 4) La droite \mathcal{D} est perpendiculaire au plan \mathcal{P} si, et seulement si, les vecteurs \vec{n} et \vec{u} sont colinéaires.



Applications

On considère les deux plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} définis par les équations cartésiennes :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} : & 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ \mathcal{Q} : & (m-1)x + 2y + (2m-3)z + 7 = 0\end{aligned}$$

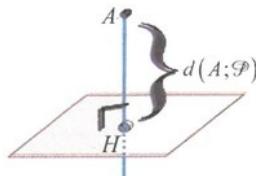
- Déterminer la valeur de m pour laquelle les plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont orthogonaux.
- Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{P}' passant par $A(-1; -1; 0)$ et parallèle au plan \mathcal{P} .

3-4/ Distance d'un point à un plan de l'espace

Définition

Soit \mathcal{P} un plan et A un point de l'espace.

La distance du point A au plan \mathcal{P} , notée $d(A; \mathcal{P})$, est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} : $d(A; \mathcal{P}) = AH$



La distance du point $A(x_A; y_A; z_A)$ au plan \mathcal{P} d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule suivante :

$$d(A; \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Applications

On considère les plans $\mathcal{P} : x + y - z + 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : 2x + y + 2z - 3 = 0$.

- a- Calculer $d(A; \mathcal{P})$ et $d(A; \mathcal{Q})$ sachant que $A(2; 1; -1)$.
- b- Déterminer l'ensemble des points M de l'espace \mathcal{E} tels que $d(M; \mathcal{P}) = d(M; \mathcal{Q})$.

On considère les points $A(1; -1; 2)$ et $B(2; 0; 1)$, et les plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} donnés par les équations :

$$\mathcal{P} : x + y - z - 1 = 0 \text{ et } \mathcal{Q} : 2x + y - z + 1 = 0$$

- a- Calculer la distance du point A au plan \mathcal{P} .
- b- Montrer que le point $H(2; 0; 1)$ est le projeté orthogonal du point A sur le plan \mathcal{P} .
- c- Calculer $d(A; \mathcal{Q})$. Que peut-on déduire ?

On considère dans l'espace \mathcal{E} le point $A(-1; 1; 1)$ et plan \mathcal{P} d'équation cartésienne :

$$2x - y + z - 2 = 0$$

- a- Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan \mathcal{P} .

Pour tout réel m , on pose : $\mathcal{D}_m = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AH} = m \right\}$

3. b- Déterminer analytiquement l'ensemble \mathcal{D}_m .

3. c- Déterminer m tel que $d(A; \mathcal{D}_m) = d(A; \mathcal{P})$

IV- La sphère dans l'espace

4-1/ Définition

Définition

Soit Ω un point de l'espace et R un réel positif.

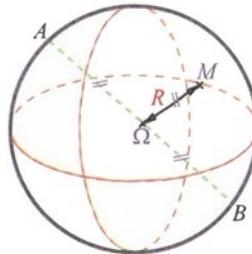
La sphère \mathcal{S} de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\Omega M = R$$

On la note : $S(\Omega; R)$

Soit A et B deux points de la sphère \mathcal{S} .

Le segment $[AB]$ est appelé diamètre de la sphère \mathcal{S} lorsque le centre Ω de la sphère \mathcal{S} est le milieu du segment $[AB]$.



4-2/ Équation cartésienne d'une sphère

Proposition

Soit R un réel positif et $\Omega(a; b; c)$ un point de l'espace.

Une équation cartésienne de la sphère \mathcal{S} de centre Ω et de rayon R est donnée par :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Applications

1. Déterminer une équation cartésienne de la sphère \mathcal{S} de centre Ω et de rayon R dans les cas suivants :

$$\begin{cases} \boxed{1} \Omega(2; 0; -1) \text{ et } R = \sqrt{2} \\ \boxed{2} \Omega(-3; 1; -2) \text{ et } R = \frac{3}{2} \end{cases}$$

4-3/ Représentation paramétrique d'une sphère

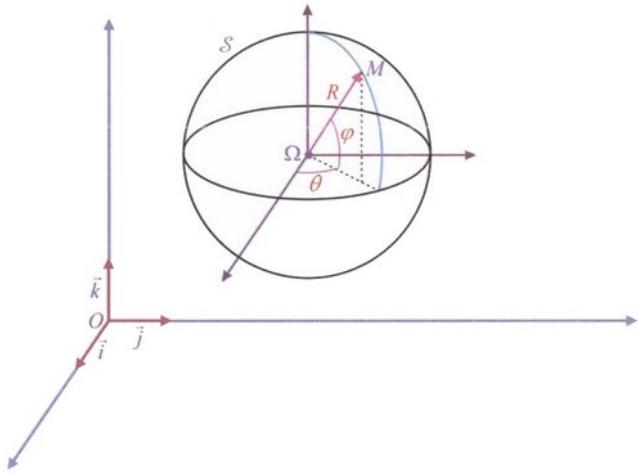
Proposition

Soit \mathcal{S} la sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon R .

Le point $M(x; y; z)$ appartient à la sphère \mathcal{S} si, et seulement si :

$$\begin{cases} x = a + R \sin \varphi \cos \theta \\ y = b + R \sin \varphi \sin \theta \\ z = c + R \cos \varphi \end{cases} \quad (\varphi; \theta) \in \mathbb{R}^2$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique de la sphère \mathcal{S} .



Applications

- Déterminer une représentation paramétrique de la sphère \mathcal{S} de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

4-4/ Ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Proposition

Soit \mathcal{S} l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

où a, b, c et d des nombres réels.

- Si $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, alors \mathcal{S} est la sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.
- Si $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$, alors : $\mathcal{S} = \{\Omega(a; b; c)\}$
- Si $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$, alors : $\mathcal{S} = \emptyset$

4-4/ Ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Applications

- Déterminer l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace \mathcal{E} dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y &= 0 \\ \mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + 4z + \frac{13}{2} &= 0 \\ \mathcal{S}_3 : x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y + 2z - \frac{7}{2} &= 0 \\ \mathcal{S}_4 : x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y - 2z + 9 &= 0\end{aligned}$$

4-5/ Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Proposition

Soit A et B deux points distincts de l'espace \mathcal{E} .

- L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.
- Une équation cartésienne de la sphère est donnée par :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

Applications

On Applications considère dans l'espace \mathcal{E} les points suivants :

$$A(2; 0; 1); B(1; -1; 1); C(0; 0; -1)$$

1. a- Déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$.
1. b- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. Que peut-on déduire ?
2. a- Déterminer une équation cartésienne de la sphère \mathcal{S} de diamètre $[AC]$.
2. b- En déduire le centre et le rayon de la sphère \mathcal{S} .

4-6/ Intersection d'une sphère et d'une droite

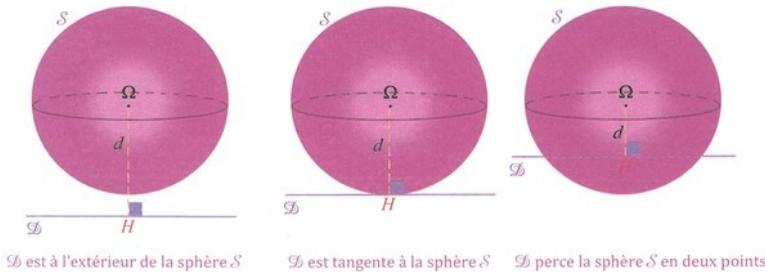
Proposition

Soit $\mathcal{S}(\Omega; R)$ une sphère et \mathcal{D} une droite de l'espace \mathcal{E} .

On désigne par d la distance du point Ω à la droite \mathcal{D} , et H le projeté orthogonal de Ω sur \mathcal{D} .

On a les propriétés suivantes :

- 1) Si $d > R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{S} = \emptyset$. On dit que la droite \mathcal{D} est à l'extérieur de la sphère \mathcal{S} .
- 2) Si $d = R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{S} = \{H\}$. On dit que la droite \mathcal{D} est tangente à la sphère \mathcal{S} au point H .
- 3) Si $d < R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{S} = \{A, B\}$. On dit que la droite \mathcal{D} est perçue la sphère \mathcal{S} aux points A et B .



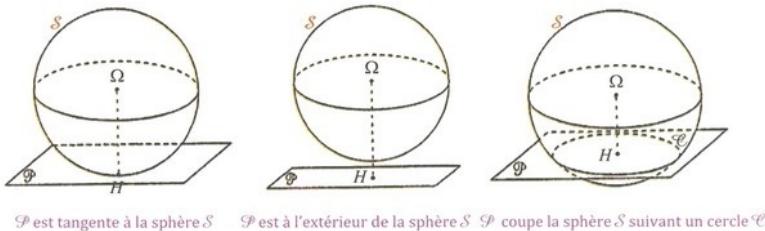
4-7/ Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit $\mathcal{S}(\Omega; R)$ une sphère et \mathcal{P} une droite de l'espace \mathcal{E} .

On désigne par d la distance du point Ω au plan \mathcal{P} , et H le projeté orthogonal de Ω sur \mathcal{P} .

On a les propriétés suivantes :

- 1) Si $d > R$, alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \emptyset$. On dit que le plan \mathcal{P} est à l'extérieur de la sphère \mathcal{S} .
- 2) Si $d = R$, alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \{H\}$. On dit que le plan \mathcal{P} est tangent à la sphère \mathcal{S} au point H .
- 3) Si $d < R$, alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \mathcal{C}$ où \mathcal{C} est le cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. On dit que le plan \mathcal{P} coupe la sphère \mathcal{S} selon le cercle $\mathcal{C}(H; \sqrt{R^2 - d^2})$.



Applications

1. Étudier l'intersection de la sphère \mathcal{S} et du plan \mathcal{P} dans chacun des cas suivants :

- 1** $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ et $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 3 = 0$
- 2** $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$ et $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 3 = 0$
- 3** $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 7 = 0$ et $\mathcal{P} : x + y + z - 4 = 0$
- 4** $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 1 = 0$ et $\mathcal{P} : x - 2y + 2z + 1 = 0$
- 5** $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 1 = 0$ et $\mathcal{P} : 2x + y + z = 0$

2. Donner une équation de la sphère de centre $\Omega(-1; 2; 3)$ et tangente au plan \mathcal{P} d'équation : $x - 2y + 2z + 1 = 0$

4-7/ Intersection d'une sphère et d'un plan

Proposition

Soit \mathcal{S} une sphère de centre Ω et soit $A \in \mathcal{S}$.

Il existe un seul plan \mathcal{P} tangent à la sphère \mathcal{S} en A , il est défini par : $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$

Une équation cartésienne du plan \mathcal{P} est donnée par :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (x_{\Omega} - x_A)(x - x_A) + (y_{\Omega} - y_A)(y - y_A) + (z_{\Omega} - z_A)(z - z_A) = 0$$