

### Sommaire

#### I- Produit scalaire dans l'espace

1-1/ Définitions et notations

1-2/ Orthogonalité de deux vecteurs

1-3/ Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

1-4/ Norme d'un vecteur de l'espace

#### II- Étude analytique du produit scalaire

2-1/ Base orthonormale - Repère orthonormal

2-2/ Expression analytique du produit scalaire

2-3/ Ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$

#### III- Plan défini par un point et un vecteur normal

3-1/ Vecteur normal à un plan

3-2/ Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

3-3/ Parallélisme et orthogonalité

3-4/ Distance d'un point à un plan de l'espace

#### IV- La sphère dans l'espace

4-1/ Définition

4-2/ Équation cartésienne d'une sphère

4-3/ Représentation paramétrique d'une sphère

4-4/ Ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

4-5/ Ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

4-6/ Intersection d'une sphère et d'une droite

4-7/ Intersection d'une sphère et d'un plan

---

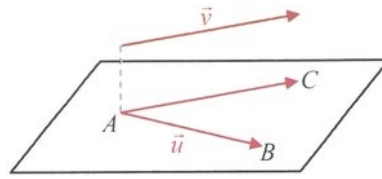
#### I- Produit scalaire dans l'espace

1-1/ Définitions et notations

##### Définition

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace, et  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points de l'espace tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

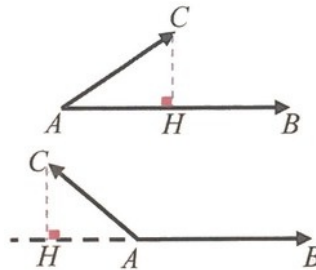
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls, le produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans l'espace est le produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  dans le plan  $(ABC)$  si  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés, ou dans tout plan contenant  $A, B$  et  $C$ , on le note :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , on convient que :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



### Remarques

Soit  $H$  le projeté orthogonal du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ .

- Si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  ont le même sens, alors  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ , cela correspond au cas où l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$  est aigu.
- Si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  ont des sens contraires, alors  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$ , cela correspond au cas où l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$  est obtus.



Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan restent valables dans l'espace.

### Applications

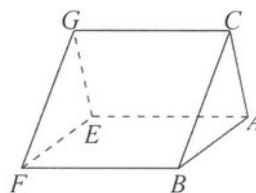
Soit  $ABCDEFGH$  un parallélépipède rectangle tel que  $AE = 5$ ,  $AB = 8$  et  $AD = 6$ .

1. Calculer les produits scalaires suivants :  $\vec{AE} \cdot \vec{BG}$  ;  $\vec{AC} \cdot \vec{HF}$  ;  $\vec{AE} \cdot \vec{DG}$

Soit  $ABCEFG$  un prisme droit tel que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

On suppose que  $AC = 3$  et  $AB = 4$  et  $AE = 8$ .

2. Calculer les produits scalaires suivants :  $\vec{AE} \cdot \vec{AF}$  ;  $\vec{CG} \cdot \vec{AF}$  ;  $\vec{BC} \cdot \vec{EG}$



## 1-2/ Orthogonalité de deux vecteurs

### Définition

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace sont orthogonaux si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

On écrit :  $\vec{u} \perp \vec{v}$

## 1-3/ Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

### Proposition

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace  $\mathcal{V}_3$  et  $k$  un nombre réel.

On a les propriétés suivantes :

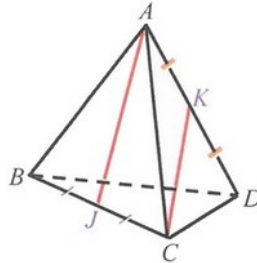
$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \boxed{2} \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} &= \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ \boxed{3} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

On dit que le produit scalaire est une opération symétrique et bilinéaire.

### Applications

Soit  $ABCD$  un tétraèdre régulier dont toutes les arêtes ont la même longueur  $a$ .

Soit  $J$  et  $K$  les milieux respectifs des segments  $[BC]$  et  $[AD]$  :



1. Calculer  $\vec{CB} \cdot \vec{CA}$  et  $\vec{CB} \cdot \vec{CD}$ , puis en déduire  $\vec{CB} \cdot \vec{AD}$ .
2. Calculer  $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$ , et en déduire  $\vec{AJ} \cdot \vec{CK}$  en fonction de  $a$ .

### 1-4/ Norme d'un vecteur de l'espace

#### Définition

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de l'espace.

Le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  s'appelle le carré scalaire du vecteur  $\vec{u}$ , et se note  $\vec{u}^2$ .

Le nombre réel positif  $\sqrt{\vec{u}^2}$  est appelé la norme du vecteur  $\vec{u}$ , et on écrit :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

#### Remarque

En posant  $\vec{u} = \vec{AB}$ , on a :  $\vec{u}^2 = \vec{AB}^2 = AB^2 = \|\vec{AB}\|^2$

#### Proposition

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace  $\mathcal{V}_3$  et  $k$  un nombre réel.

On a :

- 1)  $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- 2)  $\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$
- 3)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$
- 4) Inégalité triangulaire :  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
- 5) Inégalité de Cauchy-Schwarz :  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- 6) Identités remarquables :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \end{aligned}$$

## II- Étude analytique du produit scalaire

### 2-1/ Base orthonormale - Repère orthonormal

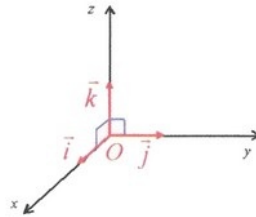
## Définition

Soit  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  un repère de l'espace  $\mathcal{E}$ .

- On dit que la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est orthonormale (ou orthonormée) lorsque :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \text{ et } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

- On dit que le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est orthonormal (ou orthonormé) lorsque la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  est orthonormale.



## 2-2/ Expression analytique du produit scalaire

### Proposition

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace  $\mathcal{V}_3$ .

Si  $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$ , alors :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$  et  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Soit  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  deux points de l'espace  $\mathcal{E}$ .

$$\text{Alors : } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

### Applications

On considère les vecteurs  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$  et

$$\vec{w} = (4 - 3m)\vec{i} + 5\vec{j} + (1 - m)\vec{k} \quad (m \in \mathbb{R}).$$

1. a- Calculer :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  ;  $\vec{u} \cdot \vec{w}$  ;  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  ;  $\|\vec{u}\|$  ;  $\|\vec{v}\|$
1. b- Déterminer la valeur de réel  $m$  pour laquelle  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont orthogonaux.
1. c- Calculer  $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ .

Soit  $ABCDEFGH$  un parallélépipède rectangle tel que  $AB = AE = 2$  et  $AD = 4$ .

Soit  $I$  le centre du carré  $ABFE$  et  $J$  le milieu du segment  $[EH]$ .

2. a- Vérifier que le repère  $(A; \frac{1}{2}\vec{AB}; \frac{1}{4}\vec{AD}; \frac{1}{2}\vec{AE})$  est orthonormé.
2. b- Déterminer, dans ce repère, les coordonnées des points  $I$ ,  $J$  et  $G$ .
2. c- Calculer le produit scalaire  $\vec{JI} \cdot \vec{JG}$  et les distances  $JI$  et  $JG$ .

## 2-3/ Ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$

### Proposition

Soit  $\vec{u}(a; b; c)$  un vecteur non nul de l'espace  $\mathcal{V}_3$ ,  $A$  un point et  $k$  un nombre réel.

L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$  est un plan dont une équation cartésienne est de la forme :

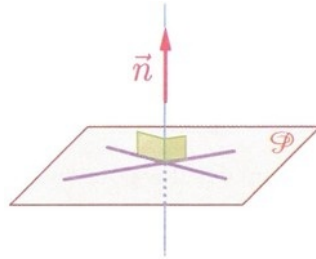
$$ax + by + cz + d = 0$$

### III- Plan défini par un point et un vecteur normal

#### 3-1/ Vecteur normal à un plan

##### Définition

Un vecteur  $\vec{n}$  non nul de l'espace est normal à un plan  $\mathcal{P}$  lorsque toute droite de vecteur directeur  $\vec{n}$  est perpendiculaire à  $\mathcal{P}$ .



#### 3-2/ Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

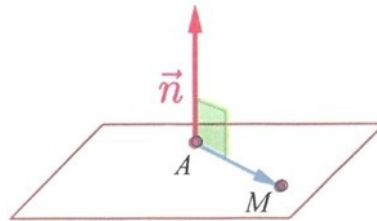
##### Proposition

Soit  $a, b, c$  et  $d$  des nombres réels tels que  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ .

- Un plan de vecteur normal  $\vec{n}(a; b; c)$  a une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

- Réciproquement, l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace tels que  $ax + by + cz + d = 0$  est un plan dont un vecteur normal est  $\vec{n}(a; b; c)$ .



##### Applications

1. Déterminer un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$  dans chacun des cas suivants :

①  $\mathcal{P} : 2x - y + 8z - 1 = 0$

②  $\mathcal{P} : 3x - 2z + 10 = 0$

③  $\mathcal{P} : 2y + 3 = 0$

2. Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{Q}$  passant par  $B(-1; 0; 3)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(2; -3; 4)$ .

On considère les points  $A(1; -1; 1)$ ,  $B(0; 2; -1)$  et  $C(-1; 1; 0)$ .

3. a- Vérifier que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

3. b- Montrer que le vecteur  $\vec{n}(1; 3; 4)$  est normal au plan  $(ABC)$ .

#### 3-3/ Parallélisme et orthogonalité

##### Proposition

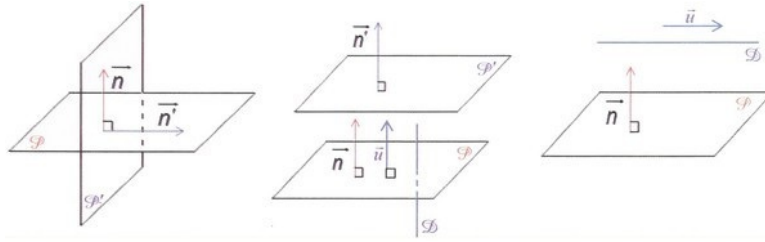
Soit  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  deux plans et  $\mathcal{D}$  une droite dans l'espace.

Soit  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  deux vecteurs normaux respectivement à  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ , et  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

Alors :

1) Les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires.

- 2) Les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont orthogonaux si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux.
- 3) La droite  $\mathcal{D}$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$  si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux.
- 4) La droite  $\mathcal{D}$  est perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}$  si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires.



## Applications

On considère les deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  définis par les équations cartésiennes :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} : 2x - 3y + z + 1 &= 0 \\ \mathcal{Q} : (m-1)x + 2y + (2m-3)z + 7 &= 0\end{aligned}$$

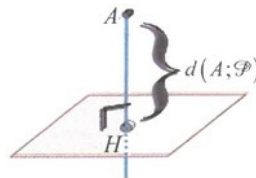
- Déterminer la valeur de  $m$  qui pour laquelle les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont orthogonaux.
- Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}'$  passant par  $A(-1; -1; 0)$  et parallèle au plan  $\mathcal{P}$ .

## 3-4/ Distance d'un point à un plan de l'espace

### Définition

Soit  $\mathcal{P}$  un plan et  $A$  un point de l'espace.

La distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{P}$ , notée  $d(A; \mathcal{P})$ , est la distance  $AH$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$  :  $d(A; \mathcal{P}) = AH$



La distance du point  $A(x_A; y_A; z_A)$  au plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $ax + by + cz + d = 0$  est donnée par la formule suivante :

$$d(A; \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

## Applications

On considère les plans  $\mathcal{P} : x + y - z + 1 = 0$  et  $\mathcal{Q} : 2x + y + 2z - 3 = 0$ .

- a- Calculer  $d(A; \mathcal{P})$  et  $d(A; \mathcal{Q})$  sachant que  $A(2; 1; -1)$ .
- b- Déterminer l'ensemble des points  $M$  de l'espace  $\mathcal{E}$  tels que  $d(M; \mathcal{P}) = d(M; \mathcal{Q})$ .

On considère les points  $A(1; -1; 2)$  et  $B(2; 0; 1)$ , et les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  donnés par les équations :

$$\mathcal{P} : x + y - z - 1 = 0 \text{ et } \mathcal{Q} : 2x + y - z + 1 = 0$$

- a- Calculer la distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{P}$ .
- b- Montrer que le point  $H(2; 0; 1)$  est le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .
- c- Calculer  $d(A; \mathcal{Q})$ . Que peut-en déduire ?

On considère dans l'espace  $\mathcal{E}$  le point  $A(-1; 1; 1)$  et plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne :

$$2x - y + z - 2 = 0$$

- a- Déterminer les coordonnées du point  $H$  projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

Pour tout réel  $m$ , on pose :  $\mathcal{Q}_m = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AH} = m \right\}$

3. b- Déterminer analytiquement l'ensemble  $\mathcal{Q}_m$ .
3. c- Déterminer  $m$  tel que  $d(A; \mathcal{Q}_m) = d(A; \mathcal{P})$

## IV- La sphère dans l'espace

### 4-1/ Définition

#### Définition

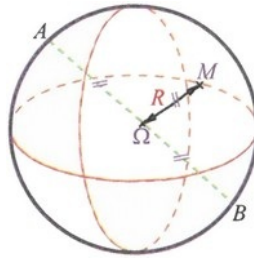
Soit  $\Omega$  un point de l'espace et  $R$  un réel positif.

La sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :  $\Omega M = R$

On la note :  $S(\Omega; R)$

Soit  $A$  et  $B$  deux points de la sphère  $\mathcal{S}$ .

Le segment  $[AB]$  est appelé diamètre de la sphère  $\mathcal{S}$  lorsque le centre  $\Omega$  de la sphère  $\mathcal{S}$  est le milieu du segment  $[AB]$ .



### 4-2/ Équation cartésienne d'une sphère

#### Proposition

Soit  $R$  un réel positif et  $\Omega(a; b; c)$  un point de l'espace.

Une équation cartésienne de la sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  est donnée par :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

#### Applications

1. Déterminer une équation cartésienne de la sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  dans les cas suivants :

$$\boxed{1} \quad \Omega(2; 0; -1) \text{ et } R = \sqrt{2}$$

$$\boxed{2} \quad \Omega(-3; 1; -2) \text{ et } R = \frac{3}{2}$$

### 4-3/ Représentation paramétrique d'une sphère

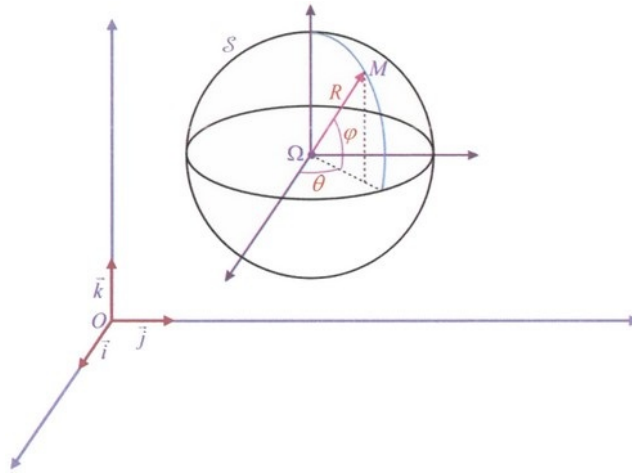
#### Proposition

Soit  $\mathcal{S}$  la sphère de centre  $\Omega(a; b; c)$  et de rayon  $R$ .

Le point  $M(x; y; z)$  appartient à la sphère  $\mathcal{S}$  si, et seulement si :

$$\begin{cases} x = a + R \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ y = b + R \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ z = c + R \cos \varphi \end{cases} \quad (\varphi; \theta) \in \mathbb{R}^2$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique de la sphère  $\mathcal{S}$ .



### Applications

- Déterminer une représentation paramétrique de la sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $\Omega \left( \frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2} \right)$  et de rayon  $R = \sqrt{3}$ .

4-4/ Ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

### Proposition

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

où  $a, b, c$  et  $d$  des nombres réels.

- Si  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ , alors  $\mathcal{S}$  est la sphère de centre  $\Omega(a; b; c)$  et de rayon  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ .
- Si  $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ , alors :  $\mathcal{S} = \{\Omega(a; b; c)\}$
- Si  $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$ , alors :  $\mathcal{S} = \emptyset$

4-4/ Ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

### Applications

- Déterminer l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace  $\mathcal{E}$  dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y &= 0 \\ \mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + 4z + \frac{13}{2} &= 0 \\ \mathcal{S}_3 : x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y + 2z - \frac{7}{2} &= 0 \\ \mathcal{S}_4 : x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y - 2z + 9 &= 0 \end{aligned}$$

4-5/ Ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

### Proposition

Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace  $\mathcal{E}$ .

- L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  est la sphère de diamètre  $[AB]$ .
- Une équation cartésienne de la sphère est donnée par :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

### Applications

On Applications considère dans l'espace  $\mathcal{E}$  les points suivants :

$$A(2; 0; 1) ; B(1; -1; 1) ; C(0; 0; -1)$$



1. a- Déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre  $[AB]$ .
1. b- Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ . Que peut-on en déduire ?
2. a- Déterminer une équation cartésienne de la sphère  $\mathcal{S}$  de diamètre  $[AC]$ .
2. b- En déduire le centre et le rayon de la sphère  $\mathcal{S}$ .

#### 4-6/ Intersection d'une sphère et d'une droite

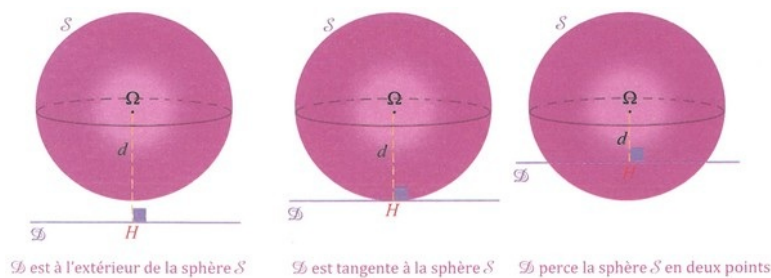
##### Proposition

Soit  $\mathcal{S}(\Omega; R)$  une sphère et  $\mathcal{D}$  une droite de l'espace  $\mathcal{E}$ .

On désigne par  $d$  la distance du point  $\Omega$  à la droite  $\mathcal{D}$ , et  $H$  le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur  $\mathcal{D}$ .

On a les propriétés suivantes :

- 1) Si  $d > R$ , alors  $\mathcal{D} \cap \mathcal{S} = \emptyset$ . On dit que la droite  $\mathcal{D}$  est à l'extérieur de la sphère  $\mathcal{S}$ .
- 2) Si  $d = R$ , alors  $\mathcal{D} \cap \mathcal{S} = \{H\}$ . On dit que la droite  $\mathcal{D}$  est tangente à la sphère  $\mathcal{S}$  au point  $H$ .
- 3) Si  $d < R$ , alors  $\mathcal{D} \cap \mathcal{S} = \{A, B\}$ . On dit que la droite  $\mathcal{D}$  perce la sphère  $\mathcal{S}$  aux points  $A$  et  $B$ .



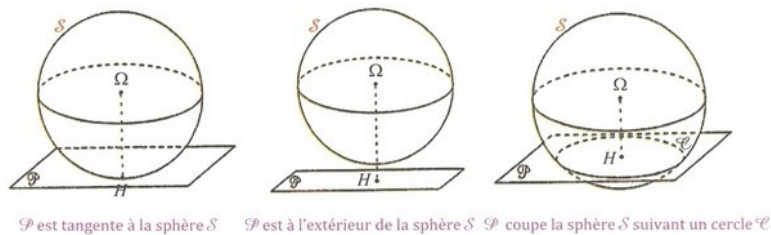
#### 4-7/ Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit  $\mathcal{S}(\Omega; R)$  une sphère et  $\mathcal{P}$  une droite de l'espace  $\mathcal{E}$ .

On désigne par  $d$  la distance du point  $\Omega$  au plan  $\mathcal{P}$ , et  $H$  le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur  $\mathcal{P}$ .

On a les propriétés suivantes :

- 1) Si  $d > R$ , alors  $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \emptyset$ . On dit que le plan  $\mathcal{P}$  est à l'extérieur de la sphère  $\mathcal{S}$ .
- 2) Si  $d = R$ , alors  $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \{H\}$ . On dit que le plan  $\mathcal{P}$  est tangent à la sphère  $\mathcal{S}$  au point  $H$ .
- 3) Si  $d < R$ , alors  $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \mathcal{C}$  où  $\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $H$  et de rayon  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ . On dit que le plan  $\mathcal{P}$  coupe la sphère  $\mathcal{S}$  selon le cercle  $\mathcal{C}$  ( $H; \sqrt{R^2 - d^2}$ ).



##### Applications

1. Étudier l'intersection de la sphère  $\mathcal{S}$  et du plan  $\mathcal{P}$  dans chacun des cas suivants :

1  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$  et  $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 3 = 0$

2  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$  et  $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 3 = 0$

3  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 7 = 0$  et  $\mathcal{P} : x + y + z - 4 = 0$

4  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 1 = 0$  et  $\mathcal{P} : x - 2y + 2z + 1 = 0$

5  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 1 = 0$  et  $\mathcal{P} : 2x + y + z = 0$

2. Donner une équation de la sphère de centre  $\Omega(-1; 2; 3)$  et tangente au plan  $\mathcal{P}$  d'équation :  
 $x - 2y + 2z + 1 = 0$

## 4-7/ Intersection d'une sphère et d'un plan

### Proposition

Soit  $\mathcal{S}$  une sphère de centre  $\Omega$  et soit  $A \in \mathcal{S}$ .

Il existe un seul plan  $\mathcal{P}$  tangent à la sphère  $\mathcal{S}$  en  $A$ , il est défini par :  $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$

Une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  est donnée par :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (x_{\Omega} - x_A)(x - x_A) + (y_{\Omega} - y_A)(y - y_A) + (z_{\Omega} - z_A)(z - z_A) = 0$$