AlloSchool

Mathématiques : 1Bac SM

Séance 16-1 : Étude analytique de l'espace (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Coordonnées d’un point dans un repère - Coordonnées d’un vecteur dans une base

1-1/ Repère et base de l’espace

Définition

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l’espace $\mathscr{V}_3$ et O un point de l’espace $\mathscr{E}$.

Le triplet $\left(\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ est appelé une base de l'espace $\mathscr{V}_3$.

Le quadruplet $\left(O,\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$ est appelé un repère de l'espace $\mathscr{E}$.

Remarque

Quatre points non coplanaires O, A, B et C déterminent une base et un repère de l'espace.

Par exemple, $\left(O, \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}\right)$ est un repère de l'espace $\mathscr{E}$.

1-2/ Coordonnées d'un point dans un repère

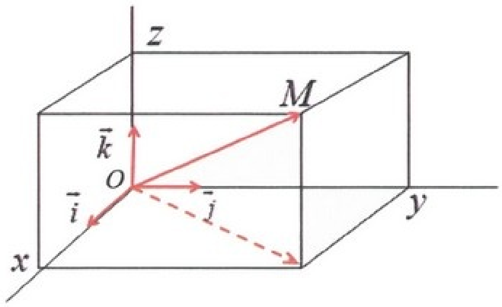
Définition

Soit $\left(O,\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$.

Pour tout point M de l'espace , il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que :
$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$
Le triplet $(x; y; z)$ est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère $\left(O,\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$.

x est l'abscisse du point M, y est l'ordonnée du point M et z est la cote du point M.

On écrit : $M\,(x; y; z)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



Remarques

- Tous les résultats de la géométrie plane s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisième coordonnées, la cote.

- Soit x, y et z des nombres réels. Alors :

$M\,(x; 0; 0) \in (Ox)$ $M\,(0; y; 0) \in (Oy)$ $M\,(0; 0; z) \in (Oz)$	$M\,(x; y; 0) \in (xOy)$ $M\,(x; 0; z) \in (xOz)$ $M\,(0; y; z) \in (yOz)$

I- Coordonnées d'un point dans un repère - Coordonnées d'un vecteur dans une base

1-3/ Coordonnées d'un vecteur dans une base

Proposition

Soit $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ une base de l'espace $\mathscr{V}_3$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace $\mathscr{V}_3$, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ tel que :
$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$

Le triplet $(x;y;z)$ est appelé triplet de coordonnées ou de composantes du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

On écrit : $\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ ou $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Soit $\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$ deux vecteurs de $\mathscr{V}_3$ muni d'une base $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors :

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow (x = x' \textit{ et } y = y' \textit{ et } z = z')$
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\,(x + x';\ y + y';\ z + z')$ et $\lambda\overrightarrow{u}\,(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$

Soit $A\,(x_A;y_A;z_A)$ et $B\,(x_B;y_B;z_B)$ deux points de $\mathscr{E}$ muni d'un repère $\left(O,\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

Alors :

- Le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $(x_B - x_A; y_B - y_B; z_B - z_A)$
- Le triplet de coordonnées du milieu du segment $[AB]$ est : $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Applications

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

On note O le centre du carré, I le milieu du segment $[BG]$ et J le centre de gravité du triangle BFH.

1. Déterminer les coordonnées des points D, H, G, O, I et J dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O,\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$, on considère les points :

$$E\,(-1;2;4)\ \ ;\ \ F\left(\tfrac{1}{2};-1;3\right)\ \ ;\ \ G\left(0;-1;-\tfrac{3}{2}\right)$$

2. Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{OG}$.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O,\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$, on considère les points :

$$A\left(-1;1;2\right)\ ;\ \ B\left(3;\tfrac{1}{2};-1\right)\ ;\ \ C\left(0;-1;1\right)$$

3. a- Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs : $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CA}$
3. b- Déterminer les coordonnées des points I, J et K milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

II- Condition de colinéarité de deux vecteurs

Théorème

Soit $\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$ deux vecteurs de $\mathscr{V}_3$ muni d'une base $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si :

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=0 \text{ et } \Delta_2=\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}=0 \text{ et } \Delta_3=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$$

Les réels $\Delta_1=xy'-x'y$, $\Delta_2=xz'-x'z$ et $\Delta_3=yz'-y'z$ sont appelés les déterminants extraits des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Applications

On considère les vecteurs $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{c}=\left(m^2-1\right)\overrightarrow{i}+2m\overrightarrow{j}+2\left(m^2-m-1\right)\overrightarrow{k}$.

1. a- Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont-ils colinéaires ? Justifier la réponse.
1. b- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ sont colinéaires.
2. Étudier l'alignement des points $A\left(1;2;3\right)$, $B\left(-1;3;2\right)$ et $C\left(3;-2;1\right)$.

III- Condition de coplanarité de trois vecteurs

Définition

Soit $\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$, $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$ et $\overrightarrow{w}\,(x'';y'';z'')$ trois vecteurs de $\mathscr{V}_3$ muni d'une base $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ dans cet ordre est le réel noté $det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)$ et défini par:

$$det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

Applications

On considère les vecteurs :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} \;\; ; \;\; \overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{w} = 5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} \;\; ; \;\; \overrightarrow{a} = (m-1)\overrightarrow{i} + 2m\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$$

1. Déterminer $det\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\right)$.
2. Déterminer les valeurs du réel m pour lesquelles $det\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{a}\right) = 0$.

Théorème

Soit $\overrightarrow{u}\,(x; y; z)$, $\overrightarrow{v}\,(x'; y'; z')$ et $\overrightarrow{w}\,(x''; y''; z'')$ trois vecteurs de $\mathscr{V}_3$ muni d'une base $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si : $det\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\right) = 0$

Applications

Dans l'espace rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$, on considère les points :

$$A\,(-3;2;0)\;;\;B\,(1;-1;2)\;;\;C\,(4;-3;5)\;;\;D\,(-1;1;1)$$
$$E\,(2m-1; m+1; 3)\ \text{où}\ m \in \mathbb{R}$$

1. Étudier la coplanarité des points A, B,C et D.
2. Déterminer les valeurs de réel m qui pour lesquelles les points A, B,C et E sont coplanaires.

IV- Étude analytique d'une droite de l'espace

4-1/ Représentation paramétrique d'une droite

Théorème

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

Soit $A\,(x_A; y_A; z_A)$ un point de $\mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u}\,(a; b; c)$ un vecteur non nul.

Le point $M\,(x; y; z)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

Remarques

- Une droite de l'espace possède une infinité de représentations paramétriques.

- Le réel t dans le théorème précédent est appelé le paramètre de la droite $\mathscr{D}$. C'est le paramètre le plus souvent utilisé dans les sciences physiques pour étudier les mouvements temporels.

Mais rien n'empêche d'utiliser d'autres paramètres généraux comme :
$k\ ;\ \alpha\ ;\ \beta\ ;\ \lambda\ ;\ \ldots$

- Pour une demi-droite, il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$ par $t \in I$ où I est un intervalle de la forme $[\alpha;+\infty[$ ou $]\alpha;+\infty[$ ou $]-\infty;\alpha]$ ou $]-\infty;\alpha[$.
- Pour un segment, il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$ par $t \in [\alpha;\beta]$.

Applications

Dans le repère $\left(O,\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points $A\,(1;-2;3)$, $B\,(0;1;-1)$ et $C\,(2;0;3)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Le point C appartient-il à la droite (AB) ? Justifier votre réponse.

On considère la droite $\mathscr{D}$ définie par sa représentation paramétrique :

$$\mathscr{D}\ :\ \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 5t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3t \end{cases}$$

3. a- Déterminer un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et point appartenant à $\mathscr{D}$.
3. b- Montrer que $A \in \mathscr{D}$.

4-2/ Équations cartésiennes d'une droite

Théorème

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O,\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A\,(x_A;y_A;z_A)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}\ (a;b;c)$.

- Si $abc \neq 0$, alors le système $\frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c}$ est appelé équation cartésienne de $\mathscr{D}$.
- Si $ab \neq 0$ et $c = 0$, alors le système $\begin{cases} \frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} \\ z - z_A = 0 \end{cases}$ est appelé équation cartésienne de $\mathscr{D}$.
- Si $a = 0$ et $b = 0$, alors le système $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$ est appelé équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

Applications

Soit $\mathscr{D}$ la droite définie par les deux équations cartésiennes :

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-4z}{4}$$

1. a- Déterminer un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ et un point appartenant à $\mathscr{D}$.
1. b- En déduire une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.
2. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (OE) où $E\,(-2;5;-7)$.

V- Étude analytique d'un plan de l'espace

5-1/ Représentation paramétrique d'un plan

Théorème

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O,\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$.

Soit $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ un point de $\mathscr{E}$, et $\overrightarrow{u}\ (a; b; c)$ et $\overrightarrow{v}\ (a'; b'; c')$ deux vecteurs non nuls.

Le point $M\,(x; y; z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} x = x_A + at + a'k \\ y = y_A + bt + b'k \quad \left((t,k) \in \mathbb{R}^2\right) \\ z = z_A + ct + c'k \end{cases}$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$.

Applications

Dans le repère $\left(O,\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points $A\,(-1; 1; 1)$, $B\,(0; 2; -1)$ et .

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).
3. Le point $D\,(2; -2; -3)$ appartient-il au plan (ABC) ? Justifier.

5-2/ Équation cartésienne d'un plan

Théorème

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O,\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$.

Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}\ (\alpha; \beta; \gamma)$ et $\overrightarrow{v}\ (\alpha'; \beta'; \gamma')$.

Le plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M\,(x; y; z)$ de l'espace qui vérifiant l'équation donnée par :

$$det\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right) = \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec :

$$a = \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}\ ;\ b = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}\ ;\ c = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}\ ;\ d = -\left(ax_A + by_A + cz_A\right)$$

L'écriture $ax + by + cz + d = 0$ est appelée équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

Remarques

Tout plan admet une infinité d'équations cartésiennes.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donnée par :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

Soit $\left(O,\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$.

- L'équation du plan $\mathscr{P}\left(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ est donnée par : $z=0$

- L'équation du plan $\mathscr{P}\left(O;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$ est donnée par : $x=0$

- L'équation du plan $\mathscr{P}\left(O,\ \vec{i}\ ;\ \vec{k}\right)$ est donnée par : $y=0$

Applications

Dans le repère $\left(O,\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$, on considère les points $A\,(1;-1;1)$, $B\,(2;0;-1)$ et $C\,(-1;0;3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Le point $E\left(3;1;-\frac{1}{2}\right)$ appartient-il au plan (ABC) ?
3. Déterminer la valeur du réel m pour laquelle le point $F\,(m-1;-2;5)$ appartient au plan (ABC).

On considère le plan $\mathscr{P}$ défini par l'équation cartésienne : $2x+8y+6z-11=0$

4. a- Justifier que $E\in\mathscr{P}$.
4. b- Déterminer deux vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$.

VI- Positions relatives de droites et plans dans l'espace

6-1/ Positions relatives de deux droites

Proposition

Soit $(\Delta)=\mathscr{D}\left(A;\vec{u}\right)$ et $(\Delta')=\mathscr{D}\left(B;\vec{v}\right)$ deux droites de l'espace $\mathscr{E}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A\in(\Delta')$ ou $B\in(\Delta)$, alors (Δ) et (Δ') sont confondues.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A\notin(\Delta')$, alors (Δ) et (Δ') sont strictement parallèles.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=0$, alors (Δ) et (Δ') sont sécantes.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)\neq 0$, alors (Δ) et (Δ') ne sont pas coplanaires.

Soit $(\Delta)=\mathscr{D}\left(A;\vec{u}\right)$ et $(\Delta')=\mathscr{D}\left(B;\vec{v}\right)$ deux droites de l'espace $\mathscr{E}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A\in(\Delta')$ ou $B\in(\Delta)$, alors (Δ) et (Δ') sont confondues.

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et $A \notin (\Delta')$, alors (Δ) et (Δ') sont strictement parallèles.

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et $det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right) = 0$, alors (Δ) et (Δ') sont sécantes.

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et $det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right) \neq 0$, alors (Δ) et (Δ') ne sont pas coplanaires.

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la position relative des droites (D) et (Δ) :

$$\boxed{1}\ (D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \ \ et \ \ (\Delta) : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = 3 - 2\alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\boxed{2}\ (D) : \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}k \\ y = \frac{1}{2} + k \\ z = \frac{3}{2} + k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \ \ et \ \ (\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - \frac{1}{2}t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\boxed{3}\ (D) : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \ \ et \ \ (\Delta) : \begin{cases} x = \beta \\ y = -2\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

6-2/ Positions relatives d'une droite et d'un plan

Proposition

Soit $\mathscr{D} = \mathscr{D}\left(A; \overrightarrow{u}\right)$ une droite, et $\mathscr{P} = \mathscr{P}\left(B; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\right)$ un plan de l'espace $\mathscr{E}$.

- Si $det\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\right) = 0$ et $A \in \mathscr{P}$, alors : $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$

- Si $det\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\right) = 0$ et $A \notin \mathscr{P}$, alors $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

- Si $det\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\right) \neq 0$, alors $\mathscr{D}$ perce le plan $\mathscr{P}$ en un point.

L’espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\ (\alpha; \beta; \gamma)$, et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$

La droite est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si : $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la position relative de la droite $\mathscr{D}$ et de plan $\mathscr{P}$:

$\boxed{1}$ $\mathscr{D}$: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 4t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ *et* $\mathscr{P}$: $-2x + 2z + 1 = 0$

$\boxed{2}$ (D) : $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = -1 + k \\ z = -7 - 3k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$ *et* $\mathscr{P}$: $\begin{cases} x = 2 + \alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 3 + \alpha + \beta \end{cases}$ $\left((\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2\right)$

$\boxed{3}$ (D) : $\begin{cases} x = -4 + 5k \\ y = -1 - 2k \\ z = -3 + k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$ *et* $\mathscr{P}$: $x + 3y + z + 4 = 0$

6-3/ Positions relatives de deux plans

Proposition

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $\left(O, \vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' deux plans définis par leurs équations cartésiennes :

$$\mathscr{P} \ : \ ax + by + cz + d = 0 \text{ et } \mathscr{P}\text{'} \ : \ a\text{'}x + b\text{'}y + c\text{'}z + d\text{'} = 0$$

Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' sont parallèles si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b\text{'} & c\text{'} \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a & c \\ a\text{'} & c\text{'} \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a & b \\ a\text{'} & b\text{'} \end{vmatrix} = 0$$

En particulier, si $abc \neq 0$, alors : $\mathscr{P} // \mathscr{P}\text{'} \Leftrightarrow \frac{a\text{'}}{a} = \frac{b\text{'}}{b} = \frac{c\text{'}}{c}$

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la position relative des plan $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$:

$\boxed{1}$ $\mathscr{P}$: $x - 3z + 3 = 0$ *et* $\mathscr{Q}$: $3y - 10z + 6 = 0$

$\boxed{2}$ $\mathscr{P}$: $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha - \beta \\ y = 2 + \alpha + \beta \\ z = -1 - \beta \end{cases}$ $\left((\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2\right)$ *et* $\mathscr{Q}$: $\begin{cases} x = 5 + 5k \\ y = 3 + t + k \\ z = 2 + t + 3k \end{cases}$ $\left((t;k) \in \mathbb{R}^2\right)$

$\boxed{3}$ $\mathscr{P}$: $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha - \beta \\ y = -2 - \alpha \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$ $\left((\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2\right)$ *et* $\mathscr{Q}$: $-2x + 2y + z + 1 = 0$