



Mathématiques : 1Bac SM

Séance 16-1 : Étude analytique de l'espace (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Coordonnées d'un point dans un repère - Coordonnées d'un vecteur dans une base

1-1/ Repère et base de l'espace

1-2/ Coordonnées d'un point dans un repère

1-3/ Coordonnées d'un vecteur dans une base

II- Condition de colinéarité de deux vecteurs

III- Condition de coplanarité de trois vecteurs

IV- Étude analytique d'une droite de l'espace

4-1/ Représentation paramétrique d'une droite

4-2/ Équations cartésiennes d'une droite

V- Étude analytique d'un plan de l'espace

5-1/ Représentation paramétrique d'un plan

5-2/ Équation cartésienne d'un plan

VI- Positions relatives de droites et plans dans l'espace

6-1/ Positions relatives de deux droites

6-2/ Positions relatives d'une droite et d'un plan

6-3/ Positions relatives de deux plans

I- Coordonnées d'un point dans un repère - Coordonnées d'un vecteur dans une base

1-1/ Repère et base de l'espace

Définition

Soit \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires de l'espace \mathcal{V}_3 et O un point de l'espace \mathcal{E} .

Le triplet $\left(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k} \right)$ est appelé une base de l'espace \mathcal{V}_3 .

Le quadruplet $\left(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ est appelé un repère de l'espace \mathcal{E} .

Remarque

Quatre points non coplanaires O, A, B et C déterminent une base et un repère de l'espace.

Par exemple, $\left(O, \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}\right)$ est un repère de l'espace \mathcal{E} .

1-2/ Coordonnées d'un point dans un repère

Définition

Soit $\left(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ un repère de l'espace \mathcal{E} .

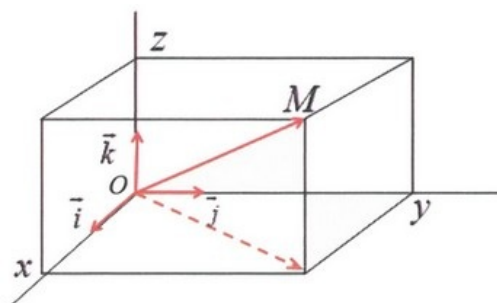
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

Le triplet $(x; y; z)$ est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère $\left(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$.

x est l'abscisse du point M , y est l'ordonnée du point M et z est la cote du point M .

On écrit : $M(x; y; z)$ ou $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



Remarques

- Tous les résultats de la géométrie plane s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisième coordonnées, la cote.
- Soit x, y et z des nombres réels. Alors :

$$\begin{aligned} M(x; 0; 0) &\in (Ox) \\ M(0; y; 0) &\in (Oy) \\ M(0; 0; z) &\in (Oz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x; y; 0) &\in (xOy) \\ M(x; 0; z) &\in (xOz) \\ M(0; y; z) &\in (yOz) \end{aligned}$$

I- Coordonnées d'un point dans un repère - Coordonnées d'un vecteur dans une base

1-3/ Coordonnées d'un vecteur dans une base

Proposition

Soit $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ une base de l'espace \mathcal{V}_3 .

Pour tout vecteur \vec{u} de l'espace \mathcal{V}_3 , il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le triplet $(x; y; z)$ est appelé triplet de coordonnées ou de composantes du vecteur \vec{u} dans la base $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$.

On écrit : $\vec{u}(x; y; z)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de \mathcal{V}_3 muni d'une base $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ et

$\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors :

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y' \text{ et } z = z')$

- $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$ et $\lambda\vec{u}(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de \mathcal{E} muni d'un repère $\left(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$.

Alors :

- Le triplet de coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} est : $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

- Le triplet de coordonnées du milieu du segment $[AB]$ est : $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

Applications

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

On note O le centre du carré, I le milieu du segment $[BG]$ et J le centre de gravité du triangle BFH .

1. Déterminer les coordonnées des points D, H, G, O, I et J dans le repère

$$\left(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right).$$

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$E(-1; 2; 4) ; F\left(\frac{1}{2}; -1; 3\right) ; G\left(0; -1; -\frac{3}{2}\right)$$

2. Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{GF}$ et \overrightarrow{OG} .

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(-1; 1; 2) ; B\left(3; \frac{1}{2}; -1\right) ; C(0; -1; 1)$$

3. a- Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs : $\vec{u} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$ et $\vec{v} = \vec{CB} + 2\vec{CA}$
3. b- Déterminer les coordonnées des points I, J et K milieux respectifs des segments $[AB], [BC]$ et $[AC]$.

II- Condition de colinéarité de deux vecteurs

Théorème

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de \mathcal{V}_3 muni d'une base $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$.

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si, et seulement si :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \Delta_2 = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \Delta_3 = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$$

Les réels $\Delta_1 = xy' - x'y$, $\Delta_2 = xz' - x'z$ et $\Delta_3 = yz' - y'z$ sont appelés les déterminants extraits des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Applications

On considère les vecteurs $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{c} = (m^2 - 1)\vec{i} + 2m\vec{j} + 2(m^2 - m - 1)\vec{k}$.

- a- Les vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont-ils colinéaires ? Justifier la réponse.
- b- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les vecteurs \vec{a} et \vec{c} sont colinéaires.
- Étudier l'alignement des points $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 3; 2)$ et $C(3; -2; 1)$.

III- Condition de coplanarité de trois vecteurs

Définition

Soit $\vec{u}(x; y; z)$, $\vec{v}(x'; y'; z')$ et $\vec{w}(x''; y''; z'')$ trois vecteurs de \mathcal{V}_3 muni d'une base $\left(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$.

Le déterminant des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} dans cet ordre est le réel noté $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ et défini par:

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

Applications

On considère les vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} ; \quad \vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{w} &= 5\vec{i} + \vec{k} ; \quad \vec{a} = (m-1)\vec{i} + 2m\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

1. Déterminer $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$.
2. Déterminer les valeurs du réel m pour lesquelles $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{a}) = 0$.

Théorème

Soit $\vec{u}(x; y; z)$, $\vec{v}(x'; y'; z')$ et $\vec{w}(x''; y''; z'')$ trois vecteurs de \mathcal{V}_3 muni d'une base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si, et seulement si : $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$

Applications

Dans l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points :

$$\begin{aligned}A(-3; 2; 0) ; B(1; -1; 2) ; C(4; -3; 5) ; D(-1; 1; 1) \\ E(2m-1; m+1; 3) \text{ où } m \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

1. Étudier la coplanarité des points A, B, C et D .
2. Déterminer les valeurs de réel m qui pour lesquelles les points A, B, C et E sont coplanaires.

IV- Étude analytique d'une droite de l'espace

4-1/ Représentation paramétrique d'une droite

Théorème

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de \mathcal{E} et $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul.

Le point $M(x; y; z)$ appartient à la droite \mathcal{D} passant par A et dirigée par \vec{u} si, et seulement si :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} .

Remarques

- Une droite de l'espace possède une infinité de représentations paramétriques.
- Le réel t dans le théorème précédent est appelé le paramètre de la droite \mathcal{D} . C'est le paramètre le plus souvent utilisé dans les sciences physiques pour étudier les mouvements temporels.

Mais rien n'empêche d'utiliser d'autres paramètres généraux comme :

$k; \alpha; \beta; \lambda; \dots$

- Pour une demi-droite, il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$ par $t \in I$ où I est un intervalle de la forme $[\alpha; +\infty[$ ou $] \alpha; +\infty[$ ou $] -\infty; \alpha]$ ou $] -\infty; \alpha[$.

- Pour un segment, il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$ par $t \in [\alpha; \beta]$.

Applications

Dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(1; -2; 3)$, $B(0; 1; -1)$ et $C(2; 0; 3)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
2. Le point C appartient-il à la droite (AB) ? Justifier votre réponse.

On considère la droite \mathcal{D} définie par sa représentation paramétrique :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. a- Déterminer un vecteur directeur de \mathcal{D} et point appartenant à \mathcal{D} .
3. b- Montrer que $A \in \mathcal{D}$.

4-2/ Équations cartésiennes d'une droite

Théorème

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit \mathcal{D} la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigée par $\vec{u}(a; b; c)$.

- Si $abc \neq 0$, alors le système $\frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c}$ est appelé équation cartésienne de \mathcal{D} .

- Si $ab \neq 0$ et $c = 0$, alors le système $\begin{cases} \frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} \\ z - z_A = 0 \end{cases}$ est appelé équation cartésienne de \mathcal{D} .

- Si $a = 0$ et $b = 0$, alors le système $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$ est appelé équation cartésienne de \mathcal{D} .

Applications

Soit \mathcal{D} la droite définie par les deux équations cartésiennes :

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-4z}{4}$$

1. a- Déterminer un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} et un point appartenant à \mathcal{D} .
1. b- En déduire une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} .
2. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (OE) où $E(-2; 5; -7)$.

V- Étude analytique d'un plan de l'espace

5-1/ Représentation paramétrique d'un plan

Théorème

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de \mathcal{E} , et $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ deux vecteurs non nuls.

Le point $M(x; y; z)$ appartient au plan \mathcal{P} passant par A et dirigée par \vec{u} et \vec{v} si, et seulement si :

$$\begin{cases} x = x_A + at + a'k \\ y = y_A + bt + b'k \\ z = z_A + ct + c'k \end{cases} \quad ((t, k) \in \mathbb{R}^2)$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique du plan \mathcal{P} .

Applications

Dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(-1; 1; 1)$, $B(0; 2; -1)$ et .

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC) .
3. Le point $D(2; -2; -3)$ appartient-il au plan (ABC) ? Justifier.

5-2/ Équation cartésienne d'un plan

Théorème

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit \mathcal{P} le plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha'; \beta'; \gamma')$.

Le plan \mathcal{P} est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace qui vérifiant l'équation donnée par :

$$\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec :

$$a = \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}; b = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}; c = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}; d = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

L'écriture $ax + by + cz + d = 0$ est appelée équation cartésienne du plan \mathcal{P} .

Remarques

Tout plan admet une infinité d'équations cartésiennes.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donnée par :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$$

Soit $\left(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ un repère de l'espace \mathcal{E} .

- L'équation du plan $\mathcal{P}\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ est donnée par : $z = 0$

- L'équation du plan $\mathcal{P}\left(O; \vec{j}; \vec{k}\right)$ est donnée par : $x = 0$

- L'équation du plan $\mathcal{P}\left(O, \vec{i}; \vec{k}\right)$ est donnée par : $y = 0$

Applications

Dans le repère $\left(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1; -1; 1)$, $B(2; 0; -1)$ et $C(-1; 0; 3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
2. Le point $E\left(3; 1; -\frac{1}{2}\right)$ appartient-il au plan (ABC) ?
3. Déterminer la valeur du réel m pour laquelle le point $F(m - 1; -2; 5)$ appartient au plan (ABC) .

On considère le plan \mathcal{P} défini par l'équation cartésienne : $2x + 8y + 6z - 11 = 0$

4. a- Justifier que $E \in \mathcal{P}$.
4. b- Déterminer deux vecteurs directeurs du plan \mathcal{P} .

VI- Positions relatives de droites et plans dans l'espace

6-1/ Positions relatives de deux droites

Proposition

Soit $(\Delta) = \mathcal{D}\left(A; \vec{u}\right)$ et $(\Delta') = \mathcal{D}\left(B; \vec{v}\right)$ deux droites de l'espace \mathcal{E} .

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et $A \in (\Delta')$ ou $B \in (\Delta)$, alors (Δ) et (Δ') sont confondues.

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et $A \notin (\Delta')$, alors (Δ) et (Δ') sont strictement parallèles.

- Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires et $\det\left(\overrightarrow{AB}; \vec{u}; \vec{v}\right) = 0$, alors (Δ) et (Δ') sont sécantes.

- Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires et $\det\left(\overrightarrow{AB}; \vec{u}; \vec{v}\right) \neq 0$, alors (Δ) et (Δ') ne sont pas coplanaires.

Soit $(\Delta) = \mathcal{D}\left(A; \vec{u}\right)$ et $(\Delta') = \mathcal{D}\left(B; \vec{v}\right)$ deux droites de l'espace \mathcal{E} .

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et $A \in (\Delta')$ ou $B \in (\Delta)$, alors (Δ) et (Δ') sont confondues.

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et $A \notin (\Delta')$, alors (Δ) et (Δ') sont strictement parallèles.
- Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires et $\det(\vec{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$, alors (Δ) et (Δ') sont sécantes.
- Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires et $\det(\vec{AB}; \vec{u}; \vec{v}) \neq 0$, alors (Δ) et (Δ') ne sont pas coplanaires.

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la position relative des droites (D) et (Δ) :

$$\begin{aligned}
 \text{[1]} (D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\Delta) : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = 3 - 2\alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\
 \text{[2]} (D) : \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}k \\ y = \frac{1}{2} + k \\ z = \frac{3}{2} + k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - \frac{1}{2}t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \\
 \text{[3]} (D) : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\Delta) : \begin{cases} x = \beta \\ y = -2\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

6-2/ Positions relatives d'une droite et d'un plan

Proposition

Soit $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A; \vec{u})$ une droite, et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(B; \vec{v}; \vec{w})$ un plan de l'espace \mathcal{E} .

- Si $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$ et $A \in \mathcal{P}$, alors : $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$
- Si $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$ et $A \notin \mathcal{P}$, alors \mathcal{D} est strictement parallèle au plan \mathcal{P} .
- Si $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \neq 0$, alors \mathcal{D} perce le plan \mathcal{P} en un point.

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit \mathcal{D} la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$, et \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$

La droite est parallèle au plan \mathcal{P} si, et seulement si : $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la position relative de la droite \mathcal{D} et de plan \mathcal{P} :

$$\begin{aligned}
\boxed{1} \mathcal{D} : & \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 4t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{P} : -2x + 2z + 1 = 0 \\
\boxed{2} (D) : & \begin{cases} x = 2 + k \\ y = -1 + k \\ z = -7 - 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{P} : \begin{cases} x = 2 + \alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 3 + \alpha + \beta \end{cases} \quad ((\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) \\
\boxed{3} (D) : & \begin{cases} x = -4 + 5k \\ y = -1 - 2k \\ z = -3 + k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{P} : x + 3y + z + 4 = 0
\end{aligned}$$

6-3/ Positions relatives de deux plans

Proposition

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans définis par leurs équations cartésiennes :

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \text{ et } \mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

En particulier, si $abc \neq 0$, alors : $\mathcal{P} // \mathcal{P}' \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la position relative des plan \mathcal{P} et \mathcal{Q} :

$$\begin{aligned}
\boxed{1} \mathcal{P} : & x - 3z + 3 = 0 \text{ et } \mathcal{Q} : 3y - 10z + 6 = 0 \\
\boxed{2} \mathcal{P} : & \begin{cases} x = 1 + 2\alpha - \beta \\ y = 2 + \alpha + \beta \\ z = -1 - \beta \end{cases} \quad ((\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) \text{ et } \mathcal{Q} : \begin{cases} x = 5 + 5k \\ y = 3 + t + k \\ z = 2 + t + 3k \end{cases} \quad ((t; k) \in \mathbb{R}^2) \\
\boxed{3} \mathcal{P} : & \begin{cases} x = 1 + 2\alpha - \beta \\ y = -2 - \alpha \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \quad ((\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) \text{ et } \mathcal{Q} : -2x + 2y + z + 1 = 0
\end{aligned}$$