

Sommaire**I- Vecteurs de l'espace**

1-1/ Notion de vecteur dans l'espace

1-2/ Addition vectorielle dans l'espace

1-3/ Multiplication d'un vecteur par un réel

II- Vecteurs colinéaires - Droites de l'espace

2-1/ Colinéarité de deux vecteurs

2-2/ Définition vectorielle d'une droite de l'espace

III- Définition sectorielle d'un plan - Vecteurs coplanaires

3-1/ Définition vectorielle d'un plan de l'espace

3-2/ Vecteurs coplanaires

IV- Parallélisme dans l'espace

4-1/ Droites parallèles dans l'espace

4-2/ Droites et plans parallèles dans l'espace

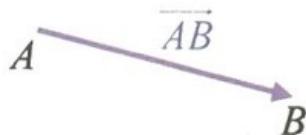
4-3/ Plans parallèles dans l'espace

I- Vecteurs de l'espace**1-1/ Notion de vecteur dans l'espace****Définition**

Soit A et B deux points de l'espace.

- Si $A \neq B$, alors le bipoint $(A; B)$ détermine un vecteur \overrightarrow{AB} d'origine A et d'extrémité B tel que :

- Sa direction est celle de la droite (AB) de l'espace ;
- Son sens est de A vers B ;
- Sa norme, notée $||\overrightarrow{AB}||$, est la longueur du segment $[AB]$, et on écrit :
$$||\overrightarrow{AB}|| = AB$$



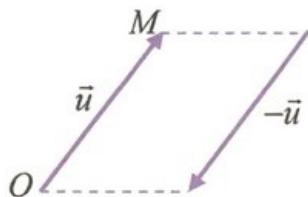
- Si $A = B$, alors le vecteur \overrightarrow{AB} est appelée le vecteur nul qu'on le note $\vec{0}$, et on écrit : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Remarques

- Soit O un point de l'espace.

Pour tout vecteur \vec{u} de l'espace, il existe un unique point M de l'espace tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

- L'ensemble de tous les vecteurs de l'espace est noté \mathcal{V}_3 .
- Le vecteur $-\vec{u}$ est le vecteur de même direction, de même norme que \vec{u} , mais de sens contraire :



- Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

- Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $ABDC$ est un parallélogramme, c'est-à-dire que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Applications

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.

1. a- Construire les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AC}$.

Soit O et O' respectivement les centres des parallélogrammes $ABCD$ et $EFGH$.

1. b- Montrer que $AOGO'$ est un parallélogramme.

Soit $ABCD$ un tétraèdre.

2. a- Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$
2. b- Construire le point F symétrique du point C par rapport au point A , puis montrer que $FAEB$ est un parallélogramme.
2. c- Construire les points H et K tels que $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{BD}$.

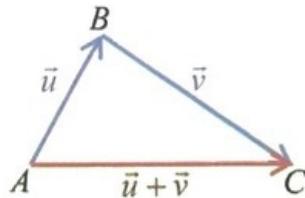
1-2/ Addition vectorielle dans l'espace

Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace \mathcal{V}_3 .

On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

La somme des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur \overrightarrow{AC} , et on écrit : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$



Proposition

1) Pour tous points M , N et P de l'espace, on a : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (Relation de Chasles).

2) Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de l'espace \mathcal{V}_3 , on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= \vec{v} + \vec{u} \\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \\ \vec{u} + \vec{0} &= \vec{u} \\ \vec{u} + (-\vec{u}) &= \vec{0}\end{aligned}$$

Applications

Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube.

1. Déterminer les points M et N sachant que :

$$\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{B'D} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{A'N} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'A}$$

Soit $ABCD$ un tétraèdre, H le milieu du segment $[BC]$ et K le milieu du segment $[AD]$.

2. Montrer que : $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{HK}$

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle, I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[EG]$.

3. a- Montrer que $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{EC}$.

3. b- Déterminer le point M tel que $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{IM}$.

1-3/ Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition

Soit \vec{u} un vecteur non nul et k un réel non nul.

Le produit du vecteur \vec{u} par le réel k est le vecteur \vec{v} noté $k \cdot \vec{u}$, ou simplement $k\vec{u}$, et qui vérifie les conditions suivantes :

- \vec{u} et \vec{v} ont la même direction ;

- \vec{v} a le même sens que celui de \vec{u} si $k > 0$, et de sens contraire de \vec{u} si $k < 0$.
- $\|\vec{v}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

On écrit : $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$

Pour tout vecteur \vec{u} et tout réel k , on pose $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ et $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.



Proposition

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace \mathcal{V}_3 et pour tout réels α et β , on a :

- 1** $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- 2** $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- 3** $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
- 4** $\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha\beta\vec{u}$
- 5** $\alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$

Remarques

- Aux règles de calcul citées dans la proposition précédente s'ajoutent les règles suivantes :

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace, et pour tout réels α et β , on a :

- 1** $\alpha(\vec{u} - \vec{v}) = \alpha\vec{u} - \alpha\vec{v}$
- 2** $(\alpha - \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} - \beta\vec{u}$
- 3** $-1 \cdot \vec{u} = -\vec{u}$
- 4** $\alpha(-\beta\vec{u}) = (-\alpha)(\beta\vec{u}) = -\alpha\beta\vec{u}$

- Si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs de l'espace \mathcal{V}_3 , alors :

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{w} - \vec{u}$$

- Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et k un réel non nul. Alors :

$\vec{AB} = k \cdot \vec{CD}$ si et seulement si, $ABCD$ ou $ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ avec : $AB = |k|CD$

II- Vecteurs colinéaires - Droites de l'espace

2-1/ Colinéarité de deux vecteurs

Définition

On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace \mathcal{V}_3 sont colinéaires s'il existe un réel k tel que :

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u} \text{ ou } \vec{u} = k \cdot \vec{v}$$

Remarques

- Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire avec tout vecteur de l'espace \mathcal{V}_3 .

- On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{u}' = \vec{A'B'}$.

Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires si, et seulement si : $(AB) \parallel (A'B')$

- Les points A , B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires, c'est-à-dire : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{AC} = k \cdot \vec{AB}$

Applications

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

On considère les points I , N et P définis par :

$$\vec{AP} = \frac{1}{5} \vec{AD} ; \vec{NA} + \vec{NE} = \vec{0} ; \vec{BI} = \frac{2}{5} \vec{BC}$$

1. a- Montrer que les vecteurs \vec{IF} et \vec{NP} sont colinéaires.

Soit J le symétrique du point B par rapport à A .

1. b- Montrer que les points I , J et P sont alignés.

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.

2. a- Construire les points K , L et M définis par :

$$\begin{aligned} \vec{AK} &= \frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AE} \\ \vec{EL} &= \frac{3}{4} \vec{EF} \\ \vec{AM} &= \vec{HF} + \frac{3}{2} \vec{AE} \end{aligned}$$

2. b- Montrer que les points K , L et M sont alignés.

Proposition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace \mathcal{V}_3 et $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

1) Si $a \vec{u} + b \vec{v} = \vec{0}$ et $(a; b) \neq (0; 0)$, alors les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

2) Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, alors pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}^2$:

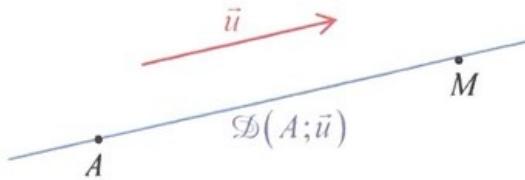
$$a \vec{u} + b \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow a = b = 0$$

2-2/ Définition vectorielle d'une droite de l'espace

Soit A un point de l'espace et \vec{u} un vecteur non nul de \mathcal{V}_3 .

L'ensemble de points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u}$ où $k \in \mathbb{R}$, est la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .

Cette droite est notée : $\mathcal{D}(A; \vec{u})$



Remarques

- On a : $\mathcal{D}(A; \vec{u}) = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} ; k \in \mathbb{R} \right\}$

Soit \mathcal{D} une droite de l'espace \mathcal{E} et \vec{u} un vecteur directeur de \mathcal{D} .

- Si A et B sont deux points de la droite \mathcal{D} , alors : $\mathcal{D}(A; \vec{u}) = \mathcal{D}(B; \vec{u})$
 - Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $\mathcal{D}(A; \vec{u}) = \mathcal{D}(A; \lambda \vec{u})$
- Si A et B sont deux points distincts de l'espace \mathcal{E} , alors :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \left\{ (\exists k \in \mathbb{R}) ; \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \right\}$$

III- Définition sectorielle d'un plan - Vecteurs coplanaires

3-1/ Définition vectorielle d'un plan de l'espace

Théorème

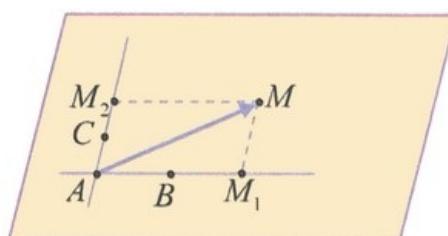
- Tout plan de l'espace est déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires appelés vecteurs directeurs de ce plan.

- Soit A un point de l'espace et \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires.

L'ensemble \mathcal{P} des points M de l'espace \mathcal{E} tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ est le plan passant par A et dirigé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

On le note $\mathcal{P}(A; \vec{u}; \vec{v})$, et on écrit :

$$\mathcal{P}(A; \vec{u}; \vec{v}) = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} ; (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$



Remarques

- Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

On a Pour tout point M de l'espace :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \left[(\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2); \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} \right]$$

- Soit \mathcal{P} le plan passant par A et dirigé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Alors, pour tout $E \in \mathcal{P}$ et pour tout $(\lambda; \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(E; \vec{u}; \vec{v}) = \mathcal{P}(E; \lambda \vec{u}; \mu \vec{v})$$

Applications

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{FG}$

1. Déterminer les plans $\mathcal{P}(C; \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}; \vec{w})$ et $\mathcal{P}(E; \vec{u} - \vec{v}; \vec{v} + \vec{w})$.

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

I, J et O sont respectivement les milieux des segments $[BC]$, $[AE]$ et $[CF]$.

2) Déterminer les plans suivants :

$$\mathcal{P}(O; \overrightarrow{AJ}; \overrightarrow{EH}) ; \mathcal{P}(I; \overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{CG}) ; \mathcal{P}(J; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{DH})$$

On considère les points I, N et P définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NE} = \overrightarrow{0} ; \overrightarrow{BI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

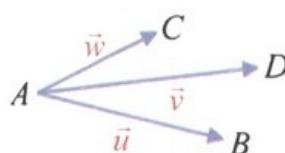
3-2/ Vecteurs coplanaires

Définition

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace \mathcal{V}_3 .

On dit que les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires, s'il existe quatre points coplanaires A, B, C et D appartenant à un même plan tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{AC} \text{ et } \vec{w} = \overrightarrow{AD}$$



Remarques

- Le vecteur nul est coplanaire avec deux vecteurs quelconques de l'espace \mathcal{V}_3 .
- Si deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, alors pour tout vecteur \vec{w} de l'espace \mathcal{V}_3 , les trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires.

- Si $ABCD$ est tétraèdre, alors les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} ne sont pas coplanaires.

Proposition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires et \vec{w} un vecteur de l'espace.

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Remarques

Soit A, B, C et M quatre points de l'espace.

S'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, alors les points A, B, C et M sont coplanaires.

Applications

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.

1. Montrer que les vecteurs \overrightarrow{FD} , $\overrightarrow{2BD}$ et $\overrightarrow{2EA}$ sont coplanaires.
2. Les vecteurs $\frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$, \overrightarrow{BD} et \overrightarrow{EH} sont-ils coplanaires ? Justifier la réponse.

On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CF}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}$.

3. Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont-ils coplanaires ?

IV- Parallélisme dans l'espace

4-1/ Droites parallèles dans l'espace

Proposition

Soit A et A' deux points de l'espace et \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non nuls.

Les droites $\mathcal{D}(A; \vec{u})$ et $\mathcal{D}(A'; \vec{v})$ sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Application

Soit $ABCD$ un tétraèdre.

Les points M et N sont respectivement les milieux des segments $[AC]$ et $[AD]$.

Soit K le point de l'espace vérifiant la relation : $2\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$

1. Montrer que $(MN) \parallel (BK)$, puis que les droites (KN) et (BM) sont sécantes.

4-2/ Droites et plans parallèles dans l'espace

Proposition

Soit \mathcal{D} une droite de vecteur directeur \vec{u} , et \mathcal{P} un plan de vecteurs directeurs \vec{v} et \vec{w} .

Pour que la droite \mathcal{D} soit parallèle au plan \mathcal{P} , il faut et il suffit que les trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} soient coplanaires.

Autrement dit : $\mathcal{D} \parallel \mathcal{P} \Leftrightarrow [\exists ((a; b) \in \mathbb{R}^2) ; \vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}]$

Application

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

K et L sont respectivement les milieux des segments $[BC]$ et $[AD]$.

Le point M est le centre de gravité de BCD , et le point N est le centre de gravité de FGH .

Soit S un point du segment $[MN]$.

1. Montrer que la droite (KS) est parallèle au plan (BFL) .

4-3/ Plans parallèles dans l'espace

Proposition

Soit \mathcal{P} un plan de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} , et \mathcal{P}' un plan de vecteurs directeurs \vec{u}' et \vec{v}' .

Pour que les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' soient parallèles, il faut et il suffit que :

$(\vec{u}, \vec{v}$ et \vec{v}' soient coplanaires) et $(\vec{u}', \vec{v}'$ et \vec{v}' soient coplanaires)

Applications

Soit $ABCD$ un tétraèdre.

On considère les points E , F et G tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

1. Montrer que les plans (BCD) et (EFG) sont parallèles.

Soit $ABCD$ un tétraèdre et $t \in \mathbb{R}^*$.

On considère les points M , N et K tels que :

$$\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{CN} = (1-t)\overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{NK} = t\overrightarrow{CB}$$

2. Montrer que les plans (ABC) et (MNK) sont parallèles.

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

Les points I , J , K et L sont les milieux respectifs des segments $[AE]$, $[AB]$, $[EH]$ et $[KJ]$.

3. a- Montrer que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
3. b- Montrer que les plans (ABC) et (IJK) se coupent selon une droite (Δ) , dont on déterminera un point et un vecteur directeur.

