Mathématiques : 1Bac SM

Séance 15-1 : Vecteurs de l'espace (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Vecteurs de l'espace

1-1/ Notion de vecteur dans l'espace

Définition

Soit A et B deux points de l'espace.

- Si $A \neq B$, alors le bipoint $(A; B)$ détermine un vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine A et d'extrémité B tel que :

- Sa direction est celle de la droite (AB) de l'espace ;
- Son sens est de A vers B ;
- Sa norme, notée $||\overrightarrow{AB}||$, est la longueur du segment $[AB]$, et on écrit : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$

- Si $A = B$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelée le vecteur nul qu'on le note $\overrightarrow{0}$, et on écrit : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

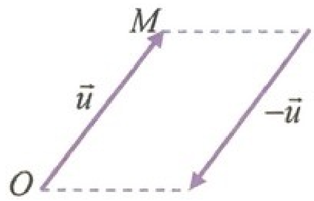
Remarques

- Soit O un point de l'espace.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un unique point M de l'espace tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$

- L'ensemble de tous les vecteurs de l'espace est noté $\mathscr{V}_3$.

- Le vecteur $-\overrightarrow{u}$ est le vecteur de même direction, de même norme que $\overrightarrow{u}$, mais de sens contraire :



- Deux vecteurs sont dits égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

- Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $ABDC$ est un parallélogramme, c'est-à-dire que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Applications

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.

1. a- Construire les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AC}$.

Soit O et O' respectivement les centres des parallélogrammes $ABCD$ et $EFGH$.

1. b- Montrer que $AOGO$' est un parallélogramme.

Soit $ABCD$ un tétraèdre.

2. a- Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$
2. b- Construire le point F symétrique du point C par rapport au point A, puis montrer que $FAEB$ est un parallélogramme.
2. c- Construire les points H et K tels que $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{BD}$.

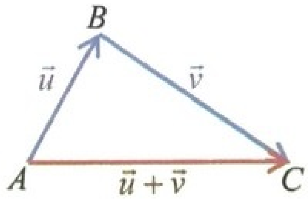
1-2/ Addition vectorielle dans l'espace

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathscr{V}_3$.

On pose : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$.

La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$, et on écrit : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$



Proposition

1) Pour tous points M, N et P de l'espace, on a : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (Relation de Chasles).

2) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace $\mathscr{V}_3$, on a :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$$
$$\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right)$$
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$$
$$\overrightarrow{u} + \left(-\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$$

Applications

Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube.

1. Déterminer les points M et N sachant que :

$$\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{B'D} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{A'N} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'A}$$

Soit $ABCD$ un tétraèdre, H le milieu du segment $[BC]$ et K le milieu du segment $[AD]$.

2. Montrer que : $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{HK}$

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle, I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[EG]$.

3. a- Montrer que $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{EC}$.

3. b- Déterminer le point M tel que $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{IM}$.

1-3/ Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.

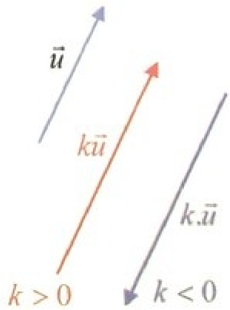
Le produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le réel k est le vecteur $\overrightarrow{v}$ noté $k.\overrightarrow{u}$, ou simplement $k\overrightarrow{u}$, et qui vérifie les conditions suivantes :

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même direction ;

- $\overrightarrow{v}$ a le même sens que celui de $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$, et de sens contraire de $\overrightarrow{u}$ si $k < 0$.
- $||\overrightarrow{v}|| = |k|.||\overrightarrow{u}||$

On écrit : $\overrightarrow{v} = k.\overrightarrow{u}$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout réel k, on pose $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $k.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.



Proposition

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace $\mathscr{V}_3$ et pour tout réels α et β, on a :

$$\boxed{1}\ \alpha\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right) = \alpha\overrightarrow{u}+\alpha\overrightarrow{v}$$

$$\boxed{2}\ (\alpha+\beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{u}$$

$$\boxed{3}\ 1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$$

$$\boxed{4}\ \alpha\left(\beta\overrightarrow{u}\right) = \alpha\beta\overrightarrow{u}$$

$$\boxed{5}\ \alpha\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left(\alpha = 0\ ou\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\right)$$

Remarques

- Aux règles de calcul citées dans la proposition précédente s'ajoutent les règles suivantes :

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace, et pour tout réels α et β, on a :

$$\boxed{1}\ \alpha\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right) = \alpha\overrightarrow{u}-\alpha\overrightarrow{v}$$

$$\boxed{2}\ (\alpha-\beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u}-\beta\overrightarrow{u}$$

$$\boxed{3}\ -1.\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$$

$$\boxed{4}\ \alpha\left(-\beta\overrightarrow{u}\right) = (-\alpha)\left(\beta\overrightarrow{\mathrm{u}}\right) = -\alpha\beta\overrightarrow{\mathrm{u}}$$

- Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs de l'espace $\mathscr{V}_3$, alors :
$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}-\overrightarrow{u}$

- Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et k un réel non nul. Alors :
$\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$ si et seulement si, $ABCD$ ou $ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ avec : $AB = |k|CD$

II- Vecteurs colinéaires - Droites de l'espace

2-1/ Colinéarité de deux vecteurs

Définition

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace $\mathscr{V}_3$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{v} = k.\overrightarrow{u} \text{ ou } \overrightarrow{u} = k.\overrightarrow{v}$$

Remarques

- Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire avec tout vecteur de l'espace $\mathscr{V}_3$.

- On considère deux vecteurs non nuis $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{A'B'}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires si, et seulement si : $(AB)//(A'B')$

- Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$

Applications

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

On considère les points I, N et P définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \tfrac{1}{5}\overrightarrow{AD} \;\; ; \;\; \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NE} = \overrightarrow{0} \;\; ; \;\; \overrightarrow{BI} = \tfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

1. a- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires.

Soit J le symétrique du point B par rapport à A.

1. b- Montrer que les points I, J et P sont alignés.

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.

2. a- Construire les points K, L et M défini par :

$$\overrightarrow{AK} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$
$$\overrightarrow{EL} = \tfrac{3}{4}\overrightarrow{EF}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{HF} + \tfrac{3}{2}\overrightarrow{AE}$$

2. b- Montrer que les points K, L et M sont alignés.

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathscr{V}_3$ et $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.

1) Si $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $(a;b) \neq (0;0)$, alors les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

2) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$:

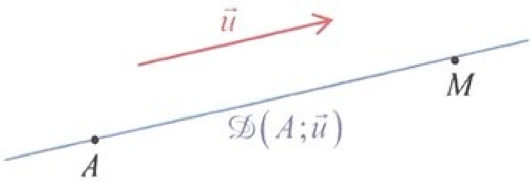
$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow a = b = 0$

2-2/ Définition vectorielle d'une droite de l'espace

Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathscr{V}_3$.

L'ensemble de points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{u}$ où $k \in \mathbb{R}$, est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Cette droite est notée : $\mathscr{D}\left(A;\overrightarrow{u}\right)$



Remarques

- On a : $\mathscr{D}\left(A;\overrightarrow{u}\right) = \left\{M \in \mathscr{E} / \overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{u}\ ;\ k \in \mathbb{R}\right\}$

Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace $\mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

- Si A et B sont deux points de la droite $\mathscr{D}$, alors : $\mathscr{D}\left(A;\overrightarrow{u}\right) = \mathscr{D}\left(B;\overrightarrow{u}\right)$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $\mathscr{D}\left(A;\overrightarrow{u}\right) = \mathscr{D}\left(A;\lambda\overrightarrow{u}\right)$

- Si A et B sont deux points distincts de l'espace $\mathscr{E}$, alors :

$M \in (AB) \Leftrightarrow \left\{(\exists k \in \mathbb{R})\ ;\ \overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}\right\}$

III- Définition sectorielle d'un plan - Vecteurs coplanaires

3-1/ Définition vectorielle d'un plan de l'espace

Théorème

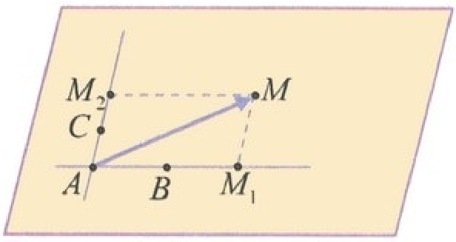
- Tout plan de l'espace est déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires appelés vecteurs directeurs de ce plan.

- Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

L'ensemble $\mathscr{P}$ des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ avec $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ est le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

On le note $\mathscr{P}\left(A;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$, et on écrit :

$$\mathscr{P}\left(A;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right) = \left\{M \in \mathscr{E} / \overrightarrow{AM} = \alpha.\overrightarrow{u} + \beta.\overrightarrow{v}\ ;\ (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$$



Remarques

- Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

On a Pour tout point M de l'espace :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \left[\left(\exists \, (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2 \right);\ \overrightarrow{AM} = \alpha.\overrightarrow{AB} + \beta.\overrightarrow{AC} \right]$$

- Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Alors, pour tout $E \in \mathscr{P}$ et pour tout $(\lambda;\mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a :

$\mathscr{P} = \mathscr{P}\left(E;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right) = \mathscr{P}\left(E;\lambda\overrightarrow{u};\overrightarrow{\mu v}\right)$

Applications

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

On pose : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{FG}$

1. Déterminer les plans $\mathscr{P}\left(C;\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right)$ et $\mathscr{P}\left(E;\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v};v + \overrightarrow{w}\right)$.

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

I, J et O sont respectivement les milieux des segments $[BC]$, $[AE]$ et $[CF]$.

2)Déterminer les plans suivants :

$$\mathscr{P}\left(O;\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{EH}\right) \;\; ; \;\; \mathscr{P}\left(I;\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{CG}\right) \;\; ; \;\; \mathscr{P}\left(J;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{DH}\right)$$

On considère les points I, N et P définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} \;\; ; \;\; \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NE} = \overrightarrow{0} \;\; ; \;\; \overrightarrow{BI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

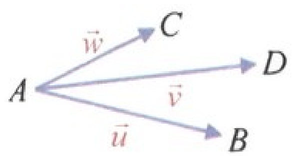
3-2/ Vecteurs coplanaires

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathscr{V}_3$.

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires, s'il existe quatre points coplanaires A, B, C et D appartenant à un même plan tels que :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$$



Remarques

- Le vecteur nul est coplanaire avec deux vecteurs quelconques de l'espace $\mathscr{V}_3$.

- Si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de l'espace $\mathscr{V}_3$, les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

- Si $ABCD$ est tétraèdre, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires et $\overrightarrow{w}$ un vecteur de l'espace.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$

Remarques

Soit A, B, C et M quatre points de l'espace.

S'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC}$, alors les points A, B, C et M sont coplanaires.

Applications

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FD}$, $2\overrightarrow{BD}$ et $2\overrightarrow{EA}$ sont coplanaires.
2. Les vecteurs $\frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont-ils coplanaires ? Justifier la réponse.

On pose : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont-ils coplanaires ?

IV- Parallélisme dans l'espace

4-1/ Droites parallèles dans l'espace

Proposition

Soit A et A' deux points de l'espace et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

Les droites $\mathscr{D}\left(A;\overrightarrow{u}\right)$ et $\mathscr{D}\left(A';\overrightarrow{v}\right)$ sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Application

Soit $ABCD$ un tétraèdre.

Les points M et N sont respectivement les milieux des segments $[AC]$ et $[AD]$.

Soit K le point de l'espace vérifiant la relation : $2\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{0}$

1. Montrer que $(MN)//(BK)$, puis que les droites (KN) et (BM) sont sécantes.

4-2/ Droites et plans parallèles dans l'espace

Proposition

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, et $\mathscr{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Pour que la droite $\mathscr{D}$ soit parallèle au plan $\mathscr{P}$, il faut et il suffit que les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ soient coplanaires.

Autrement dit : $\mathscr{D}//\mathscr{P} \Leftrightarrow \left[\exists \left((a;b)\in\mathbb{R}^2\right) ; \overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w}\right]$

Application

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

K et L sont respectivement les milieux des segments $[BC]$ et $[AD]$.

Le point M est le centre de gravité de BCD, etle point N est le centre de gravité de FGH.

Soit S un point du segment $[MN]$.

1. Montrer que la droite (KS) est parallèle au plan (BFL).

4-3/ Plans parallèles dans l'espace

Proposition

Soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et $\mathscr{P}$' un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$.

Pour que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' soient parallèles, il faut et il suffit que :

($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v}$ soient coplanaires) et ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$soient coplanaires)

Applications

Soit $ABCD$ un tétraèdre.

On considère les points E, F et G tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \tfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} \;;\; \overrightarrow{DG} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} \;;\; \overrightarrow{CF} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

1. Montrer que les plans (BCD) et (EFG) sont parallèles.

Soit $ABCD$ un tétraèdre et $t \in \mathbb{R}^*$.

On considère les points M, N et K tels que :

$$\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DA} \;;\; \overrightarrow{CN} = (1-t)\overrightarrow{CD} \;;\; \overrightarrow{NK} = t\overrightarrow{CB}$$

2. Montrer que les plans (ABC) et (MNK) sont parallèles.

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AE]$, $[AB]$, $[EH]$ et $[KJ]$.

3. a- Montrer que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
3. b- Montrer que les plans (ABC) et (IJK) se coupent selon une droite (Δ), dont on déterminera un point et un vecteur directeur.