AlloSchool

Mathématiques : 1Bac SM

Séance 12-1 : Étude des fonctions numériques (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Branches infinies d’une courbe

1-1/ Définition

Définition

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une branche infinie, lorsque l'une des coordonnées d'un point de $\mathscr{C}_f$ tend vers l'infini.

Remarque

On sait que le couple de coordonnées d'un point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ est $(x; f(x))$ avec $x \in D_f$.

Il s'ensuit donc que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie, si l'une, au moins, des conditions suivantes est vérifiée :

- L'ensemble D_f contient un intervalle de la forme $]\alpha; +\infty[$.
- L'ensemble D_f contient un intervalle delà forme $]-\infty; \alpha[$.
- La fonction f admet une limite infinie en un point (à gauche ou à droite).

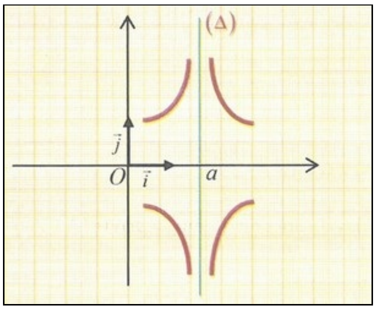
1-2/ Asymptote parallèle à l’axe des ordonnées

Définition

Soit a un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

alors on dit que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathscr{C}_f$.



Applications

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer les asymptotes verticales (parallèles à l'axe des ordonnées) à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f :

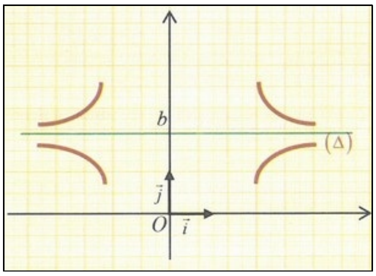
$\boxed{1}\ f(x)=\frac{3x-7}{x-2}$ $\boxed{2}\ f(x)=\frac{2x-3}{(x-2)^2}$ $\boxed{3}\ f(x)=\frac{x}{x^2+x-2}$ $\boxed{4}\ f(x)=\frac{2\sin x-1}{\cos x+1}$	$\boxed{5}\ f(x)=\tan x$ $\boxed{6}\ f(x)=\frac{\sin x-1}{\cos^2 x-1}$ $\boxed{7}\ f(x)=\frac{-x}{\sqrt{2x-1}}$ $\boxed{8}\ f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{2}\cos x-1}$

1-3/ Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

Définition

Soit b un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, alors on dit que la droite (Δ) d'équation $y=b$ est une asymptote horizontale de la courbe $\mathscr{C}_f$.



Remarque

Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ d’une fonction f sur un intervalle I, et son asymptote d’équation $y=b$, on étudie le signe de la différence $f(x)-b$ sur l'intervalle I.

Si, par exemple, on a pour tout $x\in I$: $f(x)-b>0$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'asymptote d’équation $y=b$ sur l'intervalle I.

Applications

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer les asymptotes horizontales (parallèles à l'axe des abscisses) à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f :

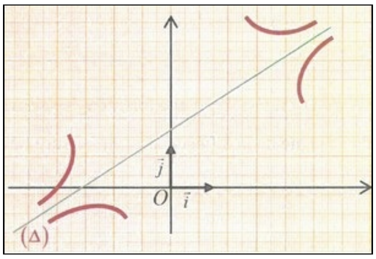
$\boxed{1}\ f(x)=\frac{3x-2}{2x-1}$ $\boxed{2}\ f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ $\boxed{3}\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$ $\boxed{4}\ f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-2}$	$\boxed{5}\ f(x)=3+\frac{\sin x}{x}$ $\boxed{6}\ f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+3x+3}}$ $\boxed{7}\ f(x)=\frac{-2x^3+x^2+1}{x^3-1}$ $\boxed{8}\ f(x)=\frac{x+\cos x}{x-2}$

1-4/ Asymptote oblique

Définition

Soit a et b deux réels tels que $a\neq 0$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, alors on dit que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$.



Remarques

- Soit $(D):\ y = ax + b$ une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

On a $(D):\ ax - y + b = 0$

La distance du point $M(x; f(x))$ à la droite (D) est :

$$d(M;(D)) = \frac{|ax+b-f(x)|}{\sqrt{a^2+1}}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, cette distance tend vers 0, c'est-à-dire que la droite (D) est presque confondue à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

- Pour étudier la position relative de la courbe d'une fonction f, sur un intervalle I, et son asymptote oblique (D) d'équation $y = ax + b$, on étudie le signe de la différence $f(x) - (ax+b)$ sur l'intervalle I. Ainsi :

- Si $f(x) - (ax+b) > 0$, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'asymptote (D).
- Si $f(x) - (ax+b) < 0$, alors $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de l'asymptote (D).
- Si $f(x_0) - (ax_0+b) = 0$ pour un certain point $x_0 \in I$, alors $\mathscr{C}_f$ et (D) sont sécantes.

Applications

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de l'asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

$\boxed{1}\ f(x) = 3x + \frac{1}{x-1}$ $\boxed{2}\ f(x) = 2x - 3 + \frac{x}{x^2+1}$ $\boxed{3}\ f(x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x-1}}$	$\boxed{4}\ f(x) = x + 4 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $\boxed{5}\ f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ $\boxed{6}\ f(x) = x - 1 + \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$

Proposition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

Pour que la droite $(D):\ y = ax + b\ \ (a \neq 0)$ soit une asymptote oblique de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction u définie sur D_f telle que :

$$\left(\forall x \in D_f\right)\ f(x) = ax + b + u(x) \text{ et } (\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0 \ ou \ \lim_{x \to -\infty} u(x) = 0)$$

La droite $(D):\ y = ax + b\ \ (a \neq 0)$ est une asymptote oblique de la courbe$\mathscr{C}_f$ si, et seulement si :

$$(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ et \ \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b) \text{ ou } (\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ et \ \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b)$$

Applications

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de l'asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

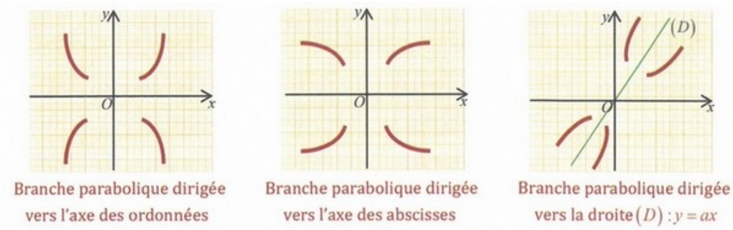
$\boxed{1}\ f(x) = \frac{2x^2+x-1}{3x-1}$ $\boxed{2}\ f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2-x+1}$ $\boxed{3}\ f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$	$\boxed{4}\ f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ $\boxed{5}\ f(x) = x\sqrt{\frac{4x}{x-2}}$ $\boxed{6}\ f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+x}$

1-5/ Directions asymptotiques

Définition

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle telle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors on dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (ou une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées).
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors on dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (ou une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses).
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$, alors on dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite $(D):\ y = ax$ (ou une branche parabolique dirigée vers la droite $(D):\ y = ax$).



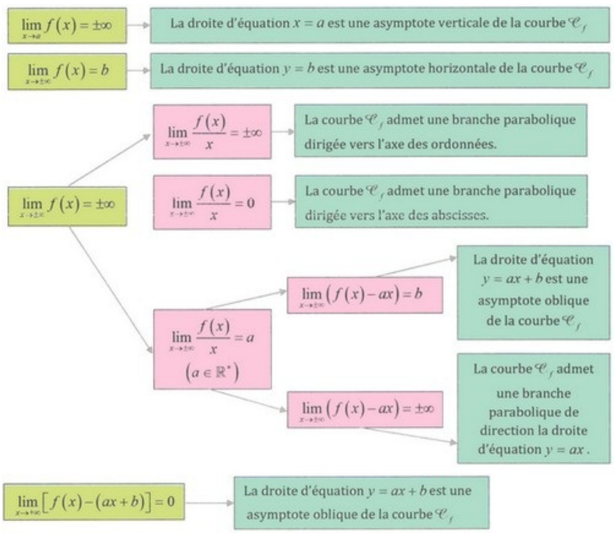
Branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées — Branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses — Branche parabolique dirigée vers la droite $(D): y = ax$

Applications

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$:

$\boxed{1}\ f(x) = x^3 + x^2 + 1$	$\boxed{5}\ f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 2x$
$\boxed{2}\ f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$	$\boxed{6}\ f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$
$\boxed{3}\ f(x) = x - \sqrt{x-1}$	$\boxed{7}\ f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{x^2-x+1}}$
$\boxed{4}\ f(x) = x\sqrt{x^2 + x + 1}$	$\boxed{8}\ f(x) = -x\frac{x\sqrt{x}}{x+4}$

Formulaire des branches infinies



II- Éléments de symétrie d'une courbe (de fonction)

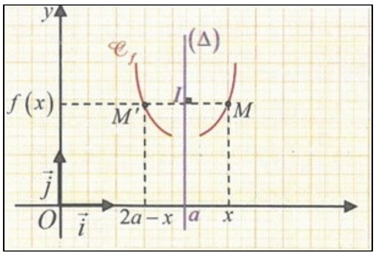
2-1/ Axe de symétrie d'une courbe

Proposition

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour que la droite (Δ) d'équation $x = a$ soit un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$:

$$(2a - x) \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x)$$



Applications

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

$\boxed{1}\ f(x)=x^2+4x+5\ et\ (\Delta):\ x=-2$	$\boxed{4}\ f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}\ et\ (\Delta):\ x=1$
$\boxed{2}\ f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{\sqrt{x^2+1}}\ et\ (\Delta):\ x=0$	$\boxed{5}\ f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}\ et\ (\Delta):\ x=3$
$\boxed{3}\ f(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}\ et\ (\Delta):\ x=\frac{1}{2}$	$\boxed{6}\ f(x)=\sin^2 x+\cos(2x)\ et\ (\Delta):\ x=\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

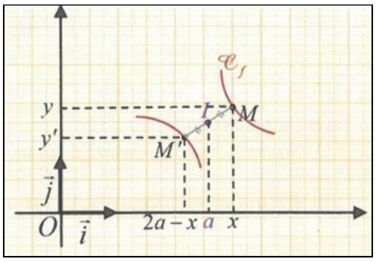
2-2/ Centre de symétrie d'une courbe

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour que le point $\Omega(a;b)$ soit un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que pour tout $x\in D_f$:

$$(2a-x)\in D_f \text{ et } f(2a-x)=2b-f(x)$$



Remarques

- Si f est une fonction paire, alors sa courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

- Si f est une fonction impaire, alors $\mathscr{C}_f$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

- Si la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet la droite d'équation $x=a$ comme axe de symétrie ou admet le point de coordonnées (a,b) comme centre de symétrie, alors on peut restreindre l'étude de la fonction / sur l'ensemble $D_{\acute{e}tude}=D_f\cap[a;+\infty[$.

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$:

$$\boxed{1}\ f(x)=\frac{x-1}{2x+1}\ et\ \Omega\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$
$$\boxed{2}\ f(x)=\cos x\ et\ \Omega\left(\frac{\pi}{2};0\right)$$
$$\boxed{3}\ f(x)=x^3-3x-2\ et\ \Omega(0;-2)$$
$$\boxed{4}\ f(x)=\sin x\ et\ \Omega(k\pi;0)\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

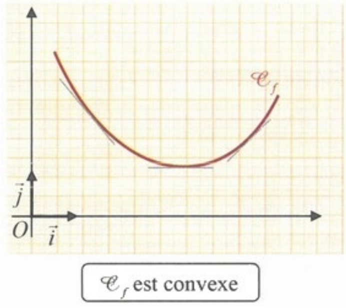
III- Concavité d’une courbe - Point d’inflexion

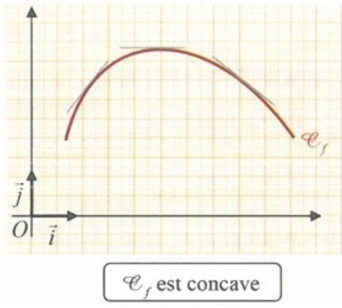
3-1/ Convexité et concavité d’une courbe (de fonction)

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe si elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, et on dit qu'elle est concave si elle est entièrement située en-dessous de chacune de ses tangentes.





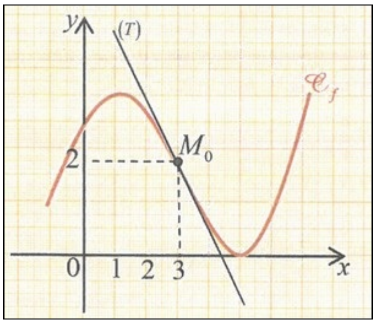
Remarque

La convexité et la concavité de de la courbe $\mathscr{C}_f$ dépendent de la position relative de $\mathscr{C}_f$ et sa tangente (T) au point $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ sur un voisinage de x_0, c'est-à-dire dépend du signe du nombre $I\left(x\right) = f\left(x\right) - y$ où $y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$ est l'équation delà tangente (T).

3-2/ Point d'inflexion d'une courbe (de fonction)

Définition

On appelle point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$, tout point où elle change de concavité.



Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f soit convexe sur I, il faut et il suffit que : $\left(\forall x \in I\right)\ f"\left(x\right) \geq 0$

- Pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ de/ soit concave sur I, il faut et il suffit que : $\left(\forall x \in I\right)\ f"\left(x\right) \leq 0$

- Pour que le point $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ soit un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que la dérivée seconde $f"$ s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre de x_0.

Applications

1. Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans chacun des cas suivants :

$\boxed{1}\ f\left(x\right) = x^2 + 5x + 2\ et\ I = \mathbb{R}$	$\boxed{5}\ f\left(x\right) = \frac{x+1}{2x+5}\ et\ I = \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$
$\boxed{2}\ f\left(x\right) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1\ et\ I = \mathbb{R}$	$\boxed{6}\ f\left(x\right) = \frac{3x^2-4x}{\left(x-1\right)^2}\ et\ I = \left]1; +\infty\right[$
$\boxed{3}\ f\left(x\right) = -3x^2 + x + 1\ et\ I = \mathbb{R}$	$\boxed{7}\ f\left(x\right) = \cos\left(2x\right) + \sin\left(2x\right)\ et\ I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
$\boxed{4}\ f\left(x\right) = x^4 - 4x^3\ et\ I = \mathbb{R}$	$\boxed{8}\ f\left(x\right) = \cos^2 x + \sin x\ et\ I = \left[0; \pi\right]$

IV- Plan d'étude d'une fonction numérique

Pour étudier une fonction numérique, on suit généralement les étapes suivantes :

1) Déterminer D_f ensemble de définition de la fonction f ;

2) Étudier la parité, la périodicité de la fonction f, rechercher des centres ou des axes de symétrie, puis déterminer son ensemble d'étude D_E ;

3) Calculer les limites de / aux bornes des intervalles de son ensemble de définition D_f ;

4) Étudier la dérivabilité de f sur D_E ;

5) Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variation sur D_f ;

6) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$;

7) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport aux asymptotes s'ils existent ;

8) Déterminer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ en des points particuliers ;

9) Étudier la concavité de la courbe $\mathscr{C}_f$ en déterminant ses points d'inflexion s'ils existent en calculant la dérivée seconde ;

10) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$. Pour cela :

- Souvent choisir un repère orthonormé.
- Construire les tangentes et les asymptotes.
- Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ en tenant compte de tableau de variations, la concavité et les images de quelques points remarquables.