Mathématiques : 1Bac SM

Séance 11-1-1 : Dérivabilité d'une fonction numérique - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Dérivabilité d’une fonction en un point

1-1/ Nombre dérivé en un point

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \mathrm{l}$

Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a. Il est noté $f'(a)$.

On écrit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ ou encore $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

Remarques

- Dans le taux de variation $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $x-a$ représente une variation de x et $f(x)-f(a)$ la variation correspondante de y.

Quand les accroissements de x et y deviennent petits, le taux d'accroissement tend vers $f'(a)$.

C'est pour cette raison qu'on trouve parfois, notamment en physique, la notation $\frac{df}{dx}(a)$ pour le nombre dérivé de f en a.

- La notion de dérivabilité, étant définie à l'aide d'une limite, est une notion locale.

Applications

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f au point a dans chacun des cas suivants :

$\boxed{1}\ f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \text{ et } a = \sqrt{2}$ $\boxed{2}\ f(x) = \lvert x^2 - 2x \rvert \text{ et } a = 0$ $\boxed{3}\ f(x) = \frac{x+1}{x-5} \text{ et } a = \frac{2}{3}$	$\boxed{4}\ f(x) = \sqrt{\lvert x+3 \rvert} \text{ et } a = -3$ $\boxed{5}\ f(x) = \sin x \text{ et } a = 0$ $\boxed{6}\ f(x) = \cos x \text{ et } a = \frac{\pi}{2}$

1-2/ Approximation affine d'une fonction dérivable

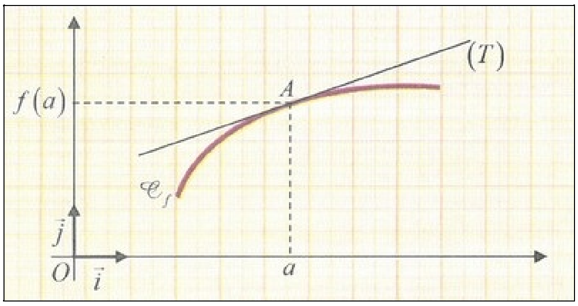
Définition

Soit f une fonction dérivable en a.

La droite (T) d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse a.

La fonction $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a.

On écrit alors : $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$ au voisinage de a ou
$f(h) \approx hf'(a) + f(a)$ au voisinage de 0.



Remarques

- On a déjà vu dans les activités les approximations suivantes, valables pour h voisin de 0 :

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2} \ ; \ \frac{1}{1+h} \approx 1 - h \ ; \ (1+h)^2 \approx 1 + 2h \ ; \ (1+h)^3 \approx 1 + 3h$$

- L'approximation affine locale consiste donc à assimiler $\mathscr{C}_f$ à (T) pour h proche de 0 (et donc pour x proche de a).

Applications

1. Donner des valeurs approchées des nombres suivants :

$$(0,998)^3 \ ; \ (2,00578)^2 \ ; \ (1,04958)^3$$
$$\sqrt{1,00791} \ ; \ \frac{1}{1{,}0434} \ ; \ \frac{1}{(0{,}999)^2}$$

2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au pointé d'abscisse a, dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ f(x) = 2x^2 + x - 1 \text{ et } a = 1$$
$$\boxed{2}\ f(x) = 3x^2 + 2 \text{ et } a = -1$$
$$\boxed{3}\ f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 \text{ et } a = 2$$
$$\boxed{4}\ f(x) = \frac{x+1}{x+2} \text{ et } a = 1$$

II- Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

2-1/ Définitions et notations

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a, a+r[$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est dérivable à droite de a s'il existe un réel l_1 tel que :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \mathrm{l}_1$$

Le nombre l_1 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a. Il est noté $f'_d(a)$.

On écrit : $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_d(a)$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a-r; a]$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est dérivable à gauche de a s'il existe un réel l_2 tel que :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \mathrm{l}_2$$

Le nombre l_2 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en a. Il est noté $f'_g(a)$.

On écrit : $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_g(a)$

Applications

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point a dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ f(x) = |x^2 - 1| \ et\ a = -1$$

$$\boxed{2}\ f(x) = |x^2 + 3x| \ et\ a = -3$$

$$\boxed{3}\ \begin{cases} f(x) = x^3 + 1\ ;\ x \leq 1 \\ f(x) = x^2 + 2 - \frac{1}{x}\ ;\ x > 1 \end{cases} \ et\ a = 1$$

$$\boxed{4}\ \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}\ ;\ x \geq -1 \\ f(x) = \sin(\pi \mathrm{x})\ ;\ x < -1 \end{cases} \ et\ a = -1$$

Proposition

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, n un entier naturel non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a alors les propriétés suivantes :

- $(f+g)' = f' + g'$; $(\alpha f)' = \alpha f'$; $(f.g)' = f'.g + f.g'$; $(f^n)' = n.f'.f^{n-1}$

- Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$

- Enfin, si f est strictement positive sur I, alors : $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Applications

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point a dans chacun des cas suivants :

$\boxed{1}\ f(x) = |x^2 - 3x|\ et\ a = 3$

$\boxed{2}\ \begin{cases} f(x) = x^3\ ;\ x \geq -1 \\ f(x) = x^2 - 2\ ;\ x < -1 \end{cases}\ et\ a = -1$

$\boxed{3}\ \begin{cases} f(x) = x\sqrt{x}\ ;\ x \geq 0 \\ f(x) = x^2\ ;\ x < 0 \end{cases}\ et\ a = 0$

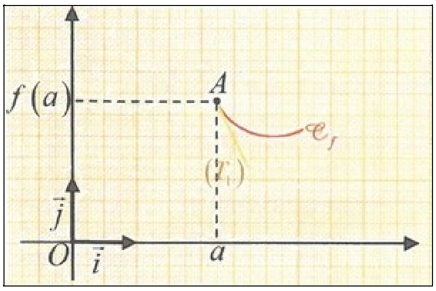
$\boxed{4}\ \begin{cases} f(x) = x^3 - x\ ;\ x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}\ ;\ x < 1 \end{cases}\ et\ a = 1$

2-2/ Interprétation géométrique (demi-tangente en un point d'une courbe)

- Si f est une fonction dérivable à droite au point a, alors sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente (T_1) au point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_d(a)$.

L'équation de la demi-tangente (T_1) est donnée par :

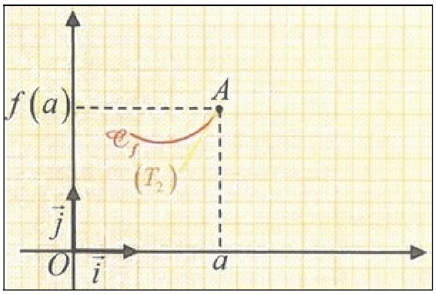
$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$



- Si f est une fonction dérivable à gauche au point a, alors sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente (T_2) au point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_g(a)$.

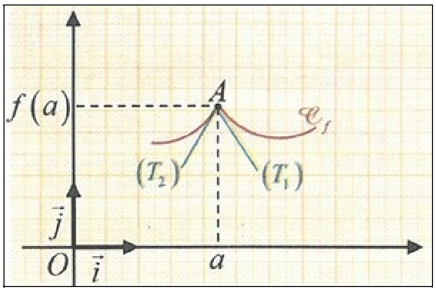
L'équation de la demi-tangente (T_2) est donnée par :

$$\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$



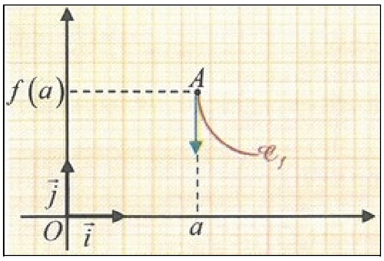
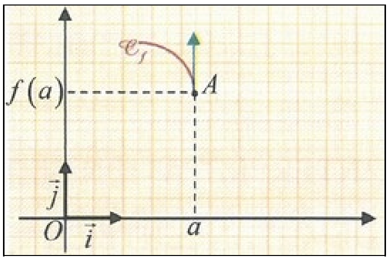
- Si f est une fonction dérivable à gauche et à droite en a telle que $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, alors f n'est dérivable en a.

On dit que $A(a; f(a))$ est un point anguleux de $\mathscr{C}_f$.



Remarques

- Si $f'_d(a) = 0$ (resp. $f'_g(a) = 0$), alors la demi-tangente (T_1) (resp. (T_2)) est horizontale, c'est-à-dire, parallèle à l'axe des abscisses.
- Si $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$, alors la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point $A(a; f(a))$ (parallèle à l'axe des ordonnées).

	
$\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$	$\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche au point a, puis définir les demi-tangentes de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point $A(a; f(a))$:

$$\boxed{1}\ f(x) = |x^2 + x| \ et\ a = 0$$
$$\boxed{2}\ f(x) = x|x-2| \ et\ a = 2$$
$$\boxed{3}\ \begin{cases} f(x) = x^3 - x\ ;\ x \leq -1 \\ f(x) = x^2 + x\ ;\ x > -1 \end{cases} \ et\ a = -1$$
$$\boxed{4}\ \begin{cases} f(x) = -x^3 + 3x\ ;\ x \leq -2 \\ f(x) = \sqrt{4 - x^2}\ ;\ -2 < x \leq 2 \end{cases} \ et\ a = -2$$

III- Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

3-1/ Fonction dérivé

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I.

On note f' la fonction qui, à à chaque $x \in I$, associe le nombre dérivée de f en x.

On l'appelle la fonction dérivée de f, ou plus simplement la dérivée de f.

On écrit aussi : $f' = \frac{df}{dx}$

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a;b]$.

On dit que f est dérivable sur $[a;b]$ si elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et dérivable à droite en a et à gauche en b.

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I, puis définir sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I :

$\boxed{1}\ f(x) = x^2 + 3x - 1$ *et* $I = \mathbb{R}$ $\boxed{2}\ f(x) = \sqrt{2x-1}$ *et* $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ $\boxed{3}\ f(x) = 2\cos x + 1$ *et* $I = \mathbb{R}$	$\boxed{4}\ f(x) = \sqrt{x - x^2}$ *et* $I = [0;1]$ $\boxed{5}\ f(x) = \left(x^2 - x\right)\sqrt{x-1}$ *et* $I = [1; +\infty[$ $\boxed{6}\ f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ *et* $I = \left]-\infty; -2\right[$

Tableau des dérivées usuelles

La fonction f	La fonction f'	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax+b \quad (a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$

II- Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

3-2/ Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, n un entier naturel non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a alors les propriétés suivantes :

- $(f+g)' = f' + g'$; $(\alpha f)' = \alpha f'$; $(f.g)' = f'.g + f.g'$; $(f^n)' = n.f'.f^{n-1}$
- Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = -\frac{f'.g - f.g'}{g^2}$
- Enfin, si f est strictement positive sur I, alors : $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

III- Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

II- Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

Applications

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition des fonctions f et f', puis définir la fonction dérivée f' :

$\boxed{1}\ f\left(x\right)=4x^3-5x^2+7x-3$ $\boxed{2}\ f\left(x\right)=-2x^5+3x^2-2x-1$ $\boxed{3}\ f\left(x\right)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ $\boxed{4}\ f\left(x\right)=\frac{3}{\left(2x-1\right)^2}$ $\boxed{5}\ f\left(x\right)=\frac{\cos x+\sin x}{x+1}$ $\boxed{6}\ f\left(x\right)=\frac{7x-1}{2x+3}$	$\boxed{7}\ f\left(x\right)=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$ $\boxed{8}\ f\left(x\right)=\left(x^2+x\right)^5$ $\boxed{9}\ f\left(x\right)=\frac{3}{x}\sqrt{2x+1}$ $\boxed{10}\ f\left(x\right)=5\cos^3 x-7\sin^2 x$ $\boxed{11}\ f\left(x\right)=\left(1-x^2\right)\tan x$ $\boxed{12}\ f\left(x\right)=\sqrt{x^4+x^2+1}$

Proposition

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et a et b deux nombres réels avec $a\neq 0$.

Soit J l'ensemble des réels x tels que $\left(ax+b\right)\in I$. Alors :

La fonction f définie par $f\left(x\right)=u\left(ax+b\right)$ est dérivable sur l'intervalle J, et de plus :

$$\left(\forall x\in J\right)\ f\text{'}\left(x\right)=au\text{'}\left(ax+b\right)$$

Applications

1. Définir la fonction dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$\boxed{1}\ f\left(x\right)=\cos\left(\pi\mathrm{x}\right)-1$ $\boxed{2}\ f\left(x\right)=5\sin\left(4x+3\right)$ $\boxed{3}\ f\left(x\right)=\tan\left(2x\right)$	$\boxed{4}\ f\left(x\right)=\cos^3\left(\pi\mathrm{x}+2\right)$ $\boxed{5}\ f\left(x\right)=\sin^2\left(3x-1\right)$ $\boxed{6}\ f\left(x\right)=\cos\left(2x\right)\sin\left(3x\right)$