Mathématiques : 1Bac SM

Séance 10-1-1 : Limite d'une fonction numérique - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Limite finie d'une fonction numérique en un point

1-1/ Fonction définie au voisinage d'un nombre réel

Définition

Soit f une fonction fonction numérique et D_f son ensemble de définition et a un nombre réel.

- On dit que f est définie au voisinage de a sauf peut-être en a s'il existe un réel r strictement positif tel que :

$$\left]a-r;a+r\right[-\{a\}\subset D_f$$

- On dit que f est définie au voisinage de a à droite s'il existe un réel r strictement positif tel que :

$$]a; a+r[\subset D_f$$

- On dit que f est définie au voisinage de a à gauche s'il existe un réel r strictement positif tel que :

$$]a-r; a[\subset D_f$$

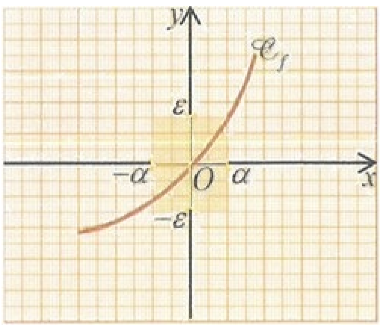
1-2/ Limite nulle en zéro d'une fonction numérique

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de zéro sauf peut-être en 0.

Dire que f a pour limite 0 quand x tend vers 0 signifie : aussi petit que soit le réel strictement positif ε, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]-\alpha; \alpha[$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]-\varepsilon; \varepsilon[$.

Autrement dit : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)$; $(\forall x \in D_f)$ $(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{0} f(x) = 0$



Applications

1. Montrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 + x\right) = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{2x+1} = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{x^2+1} = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \left(2x + x^2 - x^3\right) = 0$$

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]-r; r[$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors : $\begin{cases} (\forall x \in I) \ |f(x)| \leq |u(x)| \\ \lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Remarques

- Pour tous $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x \to 0} kx^n = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} k\sqrt{|x|} = 0$

- La limite d'une fonction en 0 est une notion locale : elle ne dépend de la fonction qu'au voisinage de 0. C'est pourquoi on peut considérer : $x \in]-1;1[$ ou $x \in]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$ ou n'importe quel intervalle ouvert centré en 0 inclus dans le ensemble de définition de la fonction étudiée.

- On peut avoir $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ sans que la fonction f soit définie en 0.

Applications

1. Calculer les limites suivantes :

$$\boxed{1}\ \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{2}\ \lim_{x \to 0} x\cos\left(\frac{\pi}{x^3}\right)$$

2. Justifier que $(\forall x \in]-1;1[)\ :\ \left|2x^3 - 3x\right| \leq 3|x|$, puis déterminer : $\lim\limits_{x \to 0} \left(2x^3 - 3x\right)$
3. Justifier que $(\forall x \in [-1;1])\ :\ \sqrt{|x| - x^2} \leq \sqrt{|x|}$, puis déterminer : $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{|x| - x^2}\right)$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

4. a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ :\ |f(x)| \leq |x|$
4. b- En déduire : $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

1-3/ Limite finie d'une fonction numérique en un point

Définition

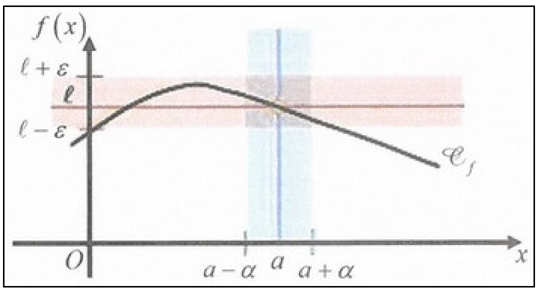
Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un réel a et $\mathrm{l} \in \mathbb{R}$.

Dire que f a pour limite l quand x tend vers a signifie : aussi petit que soit le réel strictement positif ε, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\alpha; a+\alpha[$, $f(x)$ est dans l'intervalle $]\mathrm{l}-\varepsilon; \mathrm{l}+\varepsilon[$.

Autrement dit :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \mathrm{l}| < \varepsilon)$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{l}$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = \mathrm{l}$



Remarque

En posan $x - a = h$, on obtient : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{l} \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \mathrm{l}$

Applications

1. Montrer en utilisant la définition que :

$$\boxed{1}\ \lim_{x \to 1} \left(3x^2 - 5x + 1\right) = -1$$

$$\boxed{2}\ \lim_{x \to -1} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{3}\ \lim_{x \to 2} \sqrt{4x+1} = 3$$

2. Déterminer les limites suivantes :

$$\boxed{1}\ \lim_{x \to 2} \sqrt{3x+3}$$

$$\boxed{2}\ \lim_{x \to 1} \left(x^3 - 4\right)$$

$$\boxed{3}\ \lim_{x \to -2} \frac{x+1}{2x+1}$$

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I =]a-r; a+r[- \{a\}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.

Alors : $\begin{cases} (\forall x \in I)\ \ |f(x) - l| \leq |u(x)| \\ \lim\limits_{x \to a} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Remarques

Pour tout $(a; k) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x \to a} k(x-a)^n = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} k\sqrt{|x-a|} = 0$

Si la limite d'une fonction numérique f existe en un point, alors elle est unique.

Applications

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1. a- Prouver que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ |f(x) - 1| \leq (x-1)^2$
1. b- En déduire : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

1-4/ Limite de quelques fonctions usuelles en un point

Proposition

Soit P et Q deux fonctions polynomiales et $a \in \mathbb{R}$.

Alors :

$\boxed{1}\ \lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$ $\boxed{2}\ \lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$ $\boxed{3}\ \lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$	$\boxed{4}\ Si\ Q(a) \neq 0,\ alors \lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ $\boxed{5}\ Si\ a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ \ (\mathrm{k} \in \mathbb{Z}),\ alors \lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a$ $\boxed{6}\ Si\ a > 0,\ alors \lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Applications

1. Calculer les limites suivantes :

$\boxed{1}\ \lim\limits_{x \to -2} \left(x^2 - 7x - 1\right)$	$\boxed{6}\ \lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 - 6x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4x + 3}$

$\boxed{2}\ \lim\limits_{x\to -1}\left(x^{2018}-x^{2017}+2\right)$	$\boxed{7}\ \lim\limits_{x\to 3}\left(x-2\right)^3\left(1-x^2\right)$
$\boxed{3}\ \lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\left(x^3-5x^2+x+1\right)$	$\boxed{8}\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{(2x-1)\left(x^2-5x+3\right)}{(5x^2-6)(1-x+x^2)}$
$\boxed{4}\ \lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{x-1}$	$\boxed{9}\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\sin x$
$\boxed{5}\ \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\frac{x^2+x}{2x-1}$	$\boxed{10}\ \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\tan x$

1-5/ Limite à droite - Limite à gauche

Définition

Soit r un réel strictement positif et $a\in\mathbb{R}$.

- On dit qu'une fonction f, définie sur l'intervalle $x\in]a;a+r[$, admet une limite finie l en a à droite, si les valeurs de $f(x)$ s'approchent de plus en plus de l, lorsque x s'approche de plus en plus de a en prenant des valeurs supérieures à a.

Autrement dit :

$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\alpha>0)\,;\ \left(\forall x\in D_f\right)\ \left(0<x-a<\alpha\Rightarrow\left|f(x)-\mathrm{l}\right|<\varepsilon\right)$

Ce réel l, s'il existe, est unique. Il est noté : $\mathrm{l}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)$ ou $\mathrm{l}=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$

- On dit qu'une fonction f, définie sur l'intervalle $x\in]a;a+r[$, admet une limite finie l en a à gauche, si les valeurs de $f(x)$ s'approchent de plus en plus de l, lorsque x s'approche de plus en plus de a en prenant des valeurs inférieures à a.

Autrement dit :

$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\alpha>0)\,;\ \left(\forall x\in D_f\right)\ \left(-\alpha<x-a<0\Rightarrow\left|f(x)-\mathrm{l}\right|<\varepsilon\right)$

Ce réel l, s'il existe, est unique. Il est noté : $\mathrm{l}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)$ ou $\mathrm{l}=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$

Applications

1. Étudier la limite de la fonction f au point a dans les cas suivants ($E(x)$ est la partie entière de x) :

$$\boxed{1}\ f(x)=\frac{\left|x^2-4\right|}{x^2-2x}\ et\ a=2$$

$$\boxed{2}\ \begin{cases} f(x)=\frac{x^2-2x}{x+2}\ ;\ x\geq 0\\ f(x)=E(x)\ ;\ x<0\end{cases}\ et\ a=0$$

II- Limite infinie d'une fonction numérique en un point

2-1/ Limite infinie d'une fonction numérique en zéro

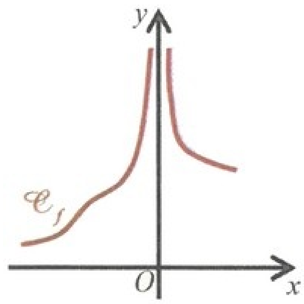
Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0.

- Dire que f a pour limite $+\infty$ en 0 signifie que $f(x)$ est supérieur à tout réel $A>0$, quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de 0.

Autrement dit : $(\forall A>0)\ (\exists\alpha>0)\ ;\ \left(\forall x\in D_f\right)\ (0<|x|<\alpha\Rightarrow f(x)>A)$

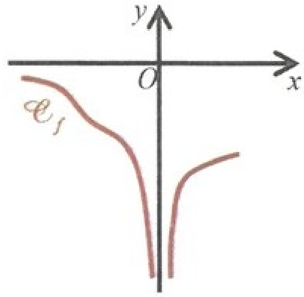
On écrit : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{0} f(x)=+\infty$



- Dire que f a pour limite $-\infty$ en 0 signifie que $f(x)$ est inférieur à tout réel $-A<0$ quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de 0.

Autrement dit : $(\forall A>0)\ (\exists\alpha>0)\ ;\ \left(\forall x\in D_f\right)\ (0<|x|<\alpha\Rightarrow f(x)<-A)$

On écrit : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{0} f(x)=-\infty$



Remarques

Soit $k\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

On a les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{k}{x^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{k}{\sqrt{x}}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{k}{x^n}=+\infty$ si l'entier n est pair.
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{k}{x^n}=-\infty$ si l'entier n est impair.

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies sur un ensemble de la forme $I=]-r;r[-\{0\}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$.

- Si pour tout $x\in I$: $f(x)\geq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} u(x)=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$
- Si pour tout $x\in I$: $f(x)\leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} u(x)=-\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

Ces propriétés restent aussi valables quand x tend vers 0 à droite ou à gauche.

Applications

1. Calculer les limites suivantes :

$\boxed{1}\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x+x^2}}{x^3}$	$\boxed{3}\ \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{2}{x}-1+\cos\frac{2}{x}\right)$

$\boxed{2}\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$	$\boxed{4}\ \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^4} - \sin\frac{\pi}{x}\right)$

2-2/ Limite infinie d'une fonction numérique en un point

Définition

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de a sauf peut-être en a.

- Dire que f a pour limite $+\infty$ en a signifie que $f(x)$ est supérieur à tout réel $A>0$, quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de a.

Autrement dit :

$(\forall A>0)\ (\exists \alpha>0)\ ;\ \left(\forall x\in D_f\right)\ (0<|x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)>A)$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = +\infty$

- Dire que f a pour limite $-\infty$ en a signifie que $f(x)$ est inférieur à tout réel $-A<0$ quitte à attribuer au réel x des valeurs suffisamment proches de a.

Autrement dit :

$(\forall A>0)\ (\exists \alpha>0)\ ;\ \left(\forall x\in D_f\right)\ (0<|x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)<-A)$

On écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f(x) = -\infty$

Remarques

- Dire que f a pour limite $+\infty$ en a signifie que la limite de la fonction $h \mapsto f(a+h)$ quand h tend vers 0 est égale à $+\infty$.

Ainsi, on a l'équivalence : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = +\infty$

De même, on a les équivalences suivantes :

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h) = -\infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{h\to 0^+} f(a+h) = +\infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{h\to 0^+} f(a+h) = -\infty$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{h\to 0^-} f(a+h) = +\infty$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{h\to 0^-} f(a+h) = -\infty$$

- Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

On a les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$
- Si n est un entier pair : $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$
- Si n est un entier impair : $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$

Applications

1. Calculer les limites suivantes :

$\boxed{1}\ \lim\limits_{x\to-1}\frac{3}{(x+1)^2}$ $\boxed{2}\ \lim\limits_{x\to3^+}\frac{1}{x-3}$ $\boxed{3}\ \lim\limits_{x\to-1}\frac{\tan^2 x+1}{(x+1)^2}$ $\boxed{4}\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{(x-1)^3}$	$\boxed{5}\ \lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-2}-\left\lvert\sin\frac{2}{(x-2)^2}\right\rvert\right)$ $\boxed{6}\ \lim\limits_{x\to1^-}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\times\frac{1}{(x-1)^{2019}}$ $\boxed{7}\ \lim\limits_{x\to-4^-}\frac{E(x)}{(x+4)^3}$

III- Limite finie d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

3-1/ Limite nulle d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

- On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si son ensemble de définition contient au moins un intervalle de la forme $]A;+\infty[$ (resp. de la forme $]-\infty;A[$).

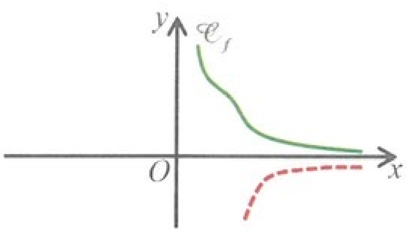
- On dit que f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) une limite nulle si, pour $x\in D_f$, $|f(x)|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut à condition que x (resp. $-x$) soit suffisamment grand.

On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ou $\lim\limits_{+\infty} f(x)=0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ou $\lim\limits_{-\infty} f(x)=0$)

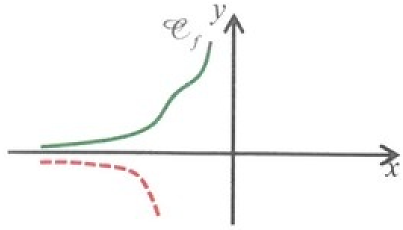
On a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \Leftrightarrow \left[(\forall\varepsilon>0)\ (\exists B>0)\ ;\ \left(\forall x\in D_f\right)\ (x>B\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon)\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \Leftrightarrow \left[(\forall\varepsilon>0)\ (\exists B>0)\ ;\ \left(\forall x\in D_f\right)\ (x<-B\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon)\right]$$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Remarques

- De la définition précédente, on obtient l'équivalence :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(-x)=0$$

- Soit $k\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \;;\; \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{\sqrt{x}} = 0 \;;\; \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{\sqrt{-x}} = 0$$

- Lorsqu'on écrit $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$, cela signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

3-2/ Limite finie d'une fonction numérique en $+\infty$ et $-\infty$

Définition

- Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et l un nombre réel.

On dit que la fonction f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si la limite de la fonction $x \mapsto f(x) - \mathrm{l}$ est nulle quand x tend vers $+\infty$.

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{l}$ ou $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \mathrm{l}$

Autrement dit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{l} \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (x > B \Rightarrow |f(x) - \mathrm{l}| < \varepsilon)\right]$$

- Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$ et l un nombre réel.

On dit que la fonction f a pour limite l quand x tend vers $-\infty$ si la limite de la fonction $x \mapsto f(x) - \mathrm{l}$ est nulle quand x tend vers $-\infty$.

On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{l}$ ou $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \mathrm{l}$

Autrement dit :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{l} \Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists B > 0)\ ;\ \left(\forall x \in D_f\right)\ (x < -B \Rightarrow |f(x) - \mathrm{l}| < \varepsilon)\right]$$

Proposition

- Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et l un nombre réel.

Si pour tout $x \in I$: $|f(x) - \mathrm{l}| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{l}$

- Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $-\infty$ et l un nombre réel.

Si pour tout $x \in I$: $|f(x) - \mathrm{l}| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 0$, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{l}$

Applications

1. Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-1 + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right) = -1$
2. Calculer les limites suivantes :

$$\boxed{1}\ \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 2}{x^4 + 4}$$
$$\boxed{2}\ \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 2 + \cos x}{x^2}$$
$$\boxed{3}\ \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \pi\sqrt{\mathrm{x}}}{\sqrt{\mathrm{x}}}$$

Soit la fonction $h\ :\ x \mapsto \frac{2x^2 - \sin^2(\pi \mathrm{x})}{x^2}$.

3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{1+\cos x}-1}{x^2}$

4. a- Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sqrt{1+\cos x}}\times\frac{1}{x^2}$
4. b- En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $|f(x)|\leq\frac{1}{x^2}$, puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

IV- Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$

4-1/ Introduction

Définition

- Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

On a les deux équivalences suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)\ (\exists B>0)\ ;\ \left(\forall x\in D_f\right)\ (x>B\Rightarrow f(x)>A)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)\ (\exists B>0)\ ;\ \left(\forall x\in D_f\right)\ (x>B\Rightarrow f(x)<-A)$$

- Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$.

On a les deux équivalences suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)\ (\exists B>0)\ ;\ \left(\forall x\in D_f\right)\ (x<-B\Rightarrow f(x)>A)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)\ (\exists B>0)\ ;\ \left(\forall x\in D_f\right)\ (x<-B\Rightarrow f(x)<-A)$$

Remarques

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

On a les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ si l'entier n est pair. et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ si l'entier n est impair.

4-2/ Limites infinies et ordre

Proposition

Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$.

- Si pour tout $x\in I$: $f(x)\geq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$, alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- Si pour tout $x\in I$: $f(x)\leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=-\infty$, alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Soit f et u deux fonctions définies au voisinage de $-\infty$.

- Si pour tout $x\in I$: $f(x)\geq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=+\infty$, alors :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

- Si pour tout $x \in I$: $f(x) \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -\infty$, alors :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Applications

On considère la fonction : $f : x \mapsto 5x^2 + x\sqrt{x^2+1}$

1. a- Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $f(x) \geq 5x^2$, puis en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
1. b- Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

On considère la fonction : $g : x \mapsto |x| + 1 - \sin(2x+1)$

2. a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ |x| \leq g(x)$
2. b-En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.
3. Calculer les limites suivantes :

$$\boxed{1}\ \lim_{x \to -\infty} x^2(2 + \sin x)$$

$$\boxed{2}\ \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - 1 + \cos x\right)$$

$$\boxed{3}\ \lim_{x \to +\infty} (2x - E(x))$$