AlloSchool

# Mathématiques : 1Bac SM

## Séance 9-1 : La rotation dans le plan (Cours)

**Professeur : Mr CHEDDADI Haitam**

Sommaire

I- Rotation - Rotation réciproque d'une rotation

1-1/ Rotation

1-2/ Rotation réciproque d'une rotation

1-3/ Décomposition d'une rotation

II- Propriétés des rotations

2-1/ Conservation de la distance

2-2/ Conservation des mesures des angles orientés

2-3/ Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs

2-4/ Conservation du barycentre

III- Images de certaines figures par une rotation

3-1/ Image d'un cercle par une rotation

3-2/ Image d'une droite, d'une demi-droite et d'un segment

IV- Composition de deux rotations

---

# I- Rotation - Rotation réciproque d'une rotation

## 1-1/ Rotation

### Définition

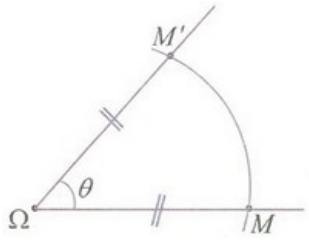
Dans le plan $\mathscr{P}$ orienté positivement, on considère un point $\Omega$ et un réel $\theta$.

La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ est la transformation du plan, qui à tout point $M$ du plan associe le point $M'$ défini par :

- Si $M = \Omega$, alors : $M' = \Omega$

- Si $M \neq \Omega$, alors : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases}$

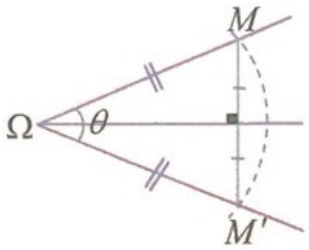
On note cette transformation par $r\,(\Omega;\theta)$, ou simplement $r$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.




### Remarque

Si $\theta \neq 2k\pi$ $(\mathrm{k} \in \mathbb{Z})$ , alors $\Omega$ le centre de la rotation $r$ est l'unique point invariant par cette rotation, et dans ce cas : Pour tout point $M$ du plan tel que $M \neq \Omega$ et $r(M) = M$', on a :

- Le point $M$' appartient au cercle de centre $\Omega$ et de rayon $\Omega M$.
- La médiatrice du segment $[MM']$ passe par le point $\Omega$.
- Le triangle $\Omega MM$' est isocèle de sommet $\Omega$.




### Applications

Soit $ABC$ un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

1. Déterminer l'angle de la rotation de centre $B$ et qui transforme $A$ en $C$.

Soit $ABC$ un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, et $I$ le centre de gravité du triangle $ABC$.

On considère la rotation $r$ de centre $I$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. a- Montrer que $r(A) = B$ et $r(B) = C$ et $r(C) = A$.

Soit $A$' le milieu du segment $[BC]$.

2. b- Déterminer $r(A')$.

Soit $ABCD$ un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On note $K$ et $L$ respectivement les milieux des segments $[CD]$ et $[AD]$.

3. Déterminer le centre et l'angle de la rotation r dans chacun des deux cas suivants :

$$\boxed{1}\ r(A) = B\ et\ r(B) = A$$
$$\boxed{2}\ r(A) = D\ et\ r(L) = K$$

## 1-2/ Rotation réciproque d'une rotation

### Proposition

Toute rotation $r(\Omega;\theta)$ du plan $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ est une application bijective.

Sa bijection réciproque est la rotation $r(\Omega;-\theta)$, et on la note $r^{-1}$ ou $r^{-1}(\Omega;\theta) = r(\Omega;-\theta)$.

On a donc : Pour tous points $M$ et $N$ du plan :

$$r(\Omega;\theta)(M)=N \Leftrightarrow r(\Omega;-\theta)(N)=M$$

### Applications

Soit $ABCD$ un carré de centre $O$ tel que : $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, et la rotation $r$ de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer $r(A)$, puis déduire $r^{-1}(D)$.
2. Déterminer $r^{-1}(C)$, puis déduire $r(D)$.

## 1-3/ Décomposition d'une rotation

### Théorème

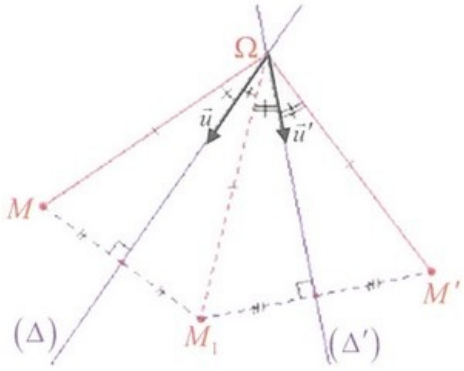
1) Si $(\Delta)$ et $(\Delta')$ sont deux droites parallèles, alors $S_{(\Delta')}\circ S_{(\Delta)}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AA'}$ où $A$ est un point de la droite $(\Delta)$ et $A'=S_{(\Delta')}(A)$.

2) Toute translation $t$ de vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ est décomposable en deux symétries orthogonales d'axes parallèles, dont l'un est choisi arbitrairement et l'autre est son image par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$ ou $-\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$.

3) Si $(\Delta)$ et $(\Delta')$ sont deux droites sécantes en $\Omega$, alors $S_{(\Delta')}\circ S_{(\Delta)}$ est la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta=2\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{u'}\right)$ où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont respectivement deux vecteurs directeurs de $(\Delta)$ et $(\Delta')$.

4) Toute rotation $r(\Omega;\theta)$ peut s'exprimer comme composée de deux symétries orthogonales $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta')}$ avec $(\Delta)$ et $(\Delta')$ sont deux droites sécantes en $\Omega$.

Plus précisément : $r=S_{(\Delta')}\circ S_{(\Delta)}$, avec $(\Delta')\cap(\Delta)=\{\Omega\}$ et $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{u'}\right)\equiv\frac{\theta}{2}\ [2\pi]$ où $(\Delta)=D\left(\Omega;\overrightarrow{u}\right)$ et $(\Delta')=D\left(\Omega;\overrightarrow{u'}\right)$.




### Applications

Soit $ABC$ un triangle équilatéral de centre $O$ tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

1. a- Déterminer une mesure de chacun des angles $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$.

1. b- Déterminer puis tracer les droites $(\Delta)$, $(\Delta')$, $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ telles que :

$$r\left(O;-\tfrac{2\pi}{3}\right)=S_{(\Delta_1)}\circ S_{(OA)}=S_{(\Delta_2)}\circ S_{(OB)}$$

et

$$r\left(A;\frac{\pi}{3}\right) = S_{(\Delta')} \circ S_{(AB)} = S_{(AC)} \circ S_{(\Delta)}$$

2. a- Déterminer $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ lorsque $(\Delta) \perp (\Delta')$.

Soit $(\Delta)$ et $(\Delta')$ deux droites parallèles et $(D)$ une droite perpendiculaire à $(\Delta)$ et $(\Delta')$.

2. b- Déterminer $S_{(D)} \circ S_{(\Delta)}$, $S_{(\Delta')} \circ S_{(D)}$ et $\left(S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}\right) \circ \left(S_{(D)} \circ S_{(\Delta)}\right)$.

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre $O$ et $A$ et $B$ deux points distincts de $(\mathscr{C})$.

Soit $M$ un point de $(\mathscr{C})$ distinct de $A$ et $B$.

On note $(\Delta)$ et $(\Delta')$ les médiatrices respectives des segments $[AM]$ et $[BM]$.

3. Déterminer $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ et $S_{(BM)} \circ S_{(AM)}$.

Soit $ABCD$ un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Soit $r$ la rotation de centre $B$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

4. Montrer que $r$ est la composée des deux symétries orthogonale dont on déterminera les axes.

# II- Propriétés des rotations

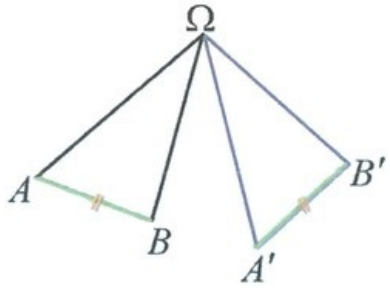
## 2-1/ Conservation de la distance

### Proposition

Soit $A$ et $B$ sont deux points du plan $\mathscr{P}$.

Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$, alors : $AB = A'B'$

On dit que la rotation conserve la distance.




## 2-2/ Conservation des mesures des angles orientés

Soit $A$ et $B$ sont deux points du plan $\mathscr{P}$.

Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$, alors : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$

(On rappelle que $\theta$ désigne l'angle de la rotation $r$)

### Remarque

La propriété précédente permet de déterminer l'angle d'une rotation à partir de deux points distincts et leurs images.

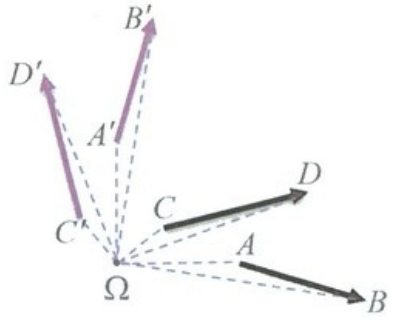
### Proposition

Soit $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan $\mathscr{P}$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Soit $A$', $B$', $C$' et $D$' leurs images respectives par la rotation $r$.

Alors : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)\ [2\pi]$

On dit que la rotation conserve les mesures des angles orientés.




## 2-3/ Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Soit $A$, $B$ et $C$ trois points alignés tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Si $r(A) = A'$, $r(B) = B'$ et $r(C) = C'$, alors : $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$

On dit que la rotation conserve l'alignement des points et le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

### Applications

Soit $ABC$ un triangle tel que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ est positif.

On construit en dehors du triangle $ABC$ des carrés $ACDE$, $BAFG$ et $CBHI$.

1. En utilisant une rotation convenable, montrer que les droites $(AI)$ et $(BD)$ sont perpendiculaires.
2. Montrer que les droites $(AH)$ et $(CG)$ sont perpendiculaires.

On considère la rotation $r$ de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit $J$ le milieu du segment $[EF]$.

On pose : $r(J) = J'$

3. a- Montrer que le point $J'$ appartient à la droite passant par $A$ et parallèle à la droite $(BC)$.
3. b- En déduire que $(AJ)$ est une hauteur du triangle $ABC$.

## 2-4/ Conservation du barycentre

### Proposition

Soit $G$ le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ tel que $\alpha + \beta \neq 0$.

Si $r(A) = A'$, $r(B) = B'$ et $r(G) = G'$, alors $G'$ est le barycentre du système $\{(A';\alpha);(B';\beta)\}$.

On dit que la rotation conserve le barycentre.

### Remarques

On peut étendre cette propriété au barycentre de trois ou quatre points pondérés.

La rotation conserve le milieu d'un segment et le centre de gravité d'un triangle.

### Applications

Soit $ABCD$ et $AEFG$ deux carrés tels que :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ et } \left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AG}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ et } \left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ et } AE = AB.$$

Soit $r$ la rotation de centre $A$ et transformant le point $B$ en $E$.

1. a- Déterminer une mesure de l'angle de la rotation $r$.
1. b- Montrer que $r(C) = F$ et $r(D) = G$.
1. c- Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{EF}}\right)$.

Soit $G$ le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(C;-1)$.

On pose : $r(G) = G'$

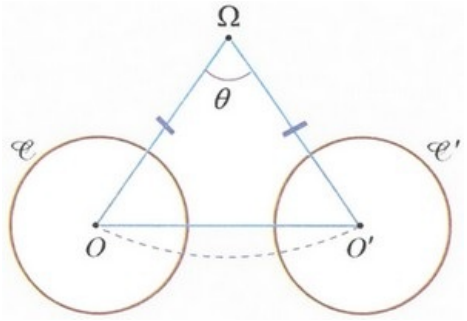
2. Montrer que les points $G$, $F$ et $G'$ sont alignés.

## III- Images de certaines figures par une rotation

### 3-1/ Image d'un cercle par une rotation

### Proposition

L'image du cercle $\mathscr{C}(O;R)$, de centre $O$ et de rayon $R$, est le cercle $\mathscr{C}'(O';R)$ où $O' = r(O)$.

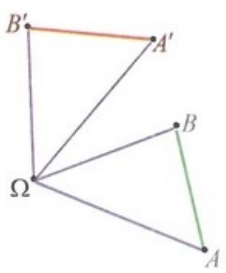


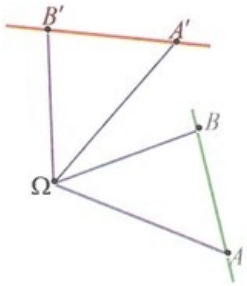

### 3-2/ Image d'une droite, d'une demi-droite et d'un segment

Soit $A$ et $B$ deux points distincts du plan.

Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$, alors :

$$r((AB)) = (A'B') \text{ et } r([AB]) = [A'B'] \text{ et } r([AB)) = [A'B')$$




### Remarques

- La rotation conserve le parallélisme : les images de deux droites parallèles par une rotation sont deux droites parallèles.

- La rotation conserve l'orthogonalité: les images de deux droites perpendiculaires par une rotation sont deux droites perpendiculaires.

- L'image d'un triangle isocèle par une rotation est un triangle isocèle.

- L'image d'un triangle rectangle par une rotation est un triangle rectangle.

- L'image d'un triangle équilatéral par une rotation est un triangle équilatéral.

- L'image d'un rectangle par une rotation est un rectangle.

- L'image de l'intersection de deux figures par une rotation est l'intersection des images de ces deux figures par cette rotation : Si $(F_1)$ et $(F_2)$ sont deux figures géométriques, alors :

$$r\left((F_1)\cap(F_2)\right)=r\left((F_1)\right)\cap r\left((F_2)\right)$$

### Applications

Soit $ABCD$ un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Soit $I$ un point du segment $[BD]$, et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $I$ et de rayon $IA$.

Le cercle $(\mathscr{C})$ coupe la droite $(AB)$ en $J$ et la droite $(AD)$ en $K$.

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que $BJ=DK$ et $(CI)\perp(JK)$.

## IV- Composition de deux rotations

### Théorème

Soit $r_1\left(\Omega_1;\alpha_1\right)$ et $r_2\left(\Omega_2;\alpha_2\right)$ deux rotations du plan d'angles non nuls.

- Si $\Omega_1=\Omega_2$, alors $r_1\circ r_2$ est la rotation de centre $\Omega_1$ et d'angle $\alpha_1+\alpha_2$.

De plus, on a dans ce cas : $r_1\circ r_2=r_2\circ r_1$

- Si $\Omega_1\neq\Omega_2$ et $\alpha_1+\alpha_2\neq 2k\pi\ (\mathrm{k}\in\mathbb{Z})$, alors $r_1\circ r_2$ est une rotation d'angle .

- Si $\Omega_1\neq\Omega_2$ et $\alpha_1+\alpha_2=2k\pi\ (\mathrm{k}\in\mathbb{Z})$, alors $r_1\circ r_2$ est une translation.

### Remarque

Dans le cas où $\Omega_1\neq\Omega_2$ et $\alpha_1+\alpha_2=2k\pi\ (\mathrm{k}\in\mathbb{Z})$, alors pour déterminer le vecteur de la translation, il suffit de déterminer l'image d'un point connu par la translation $r_1\circ r_2$.

Si par exemple $r_1\circ r_2\left(O\right)=O$', alors le vecteur de la translation est $\overrightarrow{OO'}$ : $r_1\circ r_2=t_{\overrightarrow{OO'}}$

### Théorème

Soit $ABC$ un triangle équilatéral de centre de gravité $G$ tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

1. Déterminer la nature de chacune des applications suivantes :

$$\boxed{1}\ r\left(G;\tfrac{\pi}{3}\right)\circ r\left(G;-\tfrac{\pi}{3}\right)$$
$$\boxed{2}\ r\left(C;\tfrac{\pi}{3}\right)\circ r\left(B;-\tfrac{\pi}{3}\right)$$
$$\boxed{3}\ r\left(C;\tfrac{\pi}{3}\right)\circ r\left(B;\tfrac{\pi}{3}\right)$$
$$\boxed{4}\ r\left(A;\tfrac{\pi}{3}\right)\circ r\left(I;\tfrac{2\pi}{3}\right)$$