

Séance 7-2-1 : Étude analytique du produit scalaire - Partie 2  
(Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

## V- Équation cartésienne d'un cercle

5-1/ Le cercle

5-2/ Équation cartésienne d'un cercle

5-3/ Équation d'un cercle défini par l'un de ses diamètres

5-4/ Équation d'un cercle défini par trois points non alignés

VI- Représentation paramétrique d'un cercle

VII- Ensemble des points  $M(x; y)$  du plan tels que

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

IIX- Intérieur et extérieur d'un cercle

IX- Positions relatives d'une droite et d'un cercle

X- Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle  
en un point donné de ce cercle

## V- Équation cartésienne d'un cercle

5-1/ Le cercle

**Définition**Soit  $\Omega$  un point du plan  $\mathcal{P}$  et  $R$  un réel positif.Le cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\Omega M = R$ .On le note :  $\mathcal{C}(\Omega; R)$ On a alors :  $\mathcal{C}(\Omega; R) \Leftrightarrow \Omega M = R$ 

5-2/ Équation cartésienne d'un cercle

**Proposition**Une équation cartésienne du cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $\Omega(a; b)$  et de rayon  $R$  ( $R \geq 0$ ) est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

que l'on peut écrire  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  où  $c = a^2 + b^2 - R^2$ .

## Applications

- Écrire une équation cartésienne du cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  dans chacun des cas suivants :

- 1  $\Omega(2; 4)$  et  $R = 3$
- 2  $\Omega(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$  et  $R = 2\sqrt{2}$
- 3  $\Omega(-1; -3)$  et  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- Écrire une équation du cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $\Omega$  et passant par le point  $A$  dans chacun des cas suivants :

- 1  $\Omega(2; 0)$  et  $A(2; 4)$
- 2  $\Omega(1; 2)$  et  $A(4; -2)$
- 3  $\Omega(-2; 3)$  et  $A(2; -1)$

## 5-3/ Équation d'un cercle défini par l'un de ses diamètres

### Proposition

Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts dans le plan  $\mathcal{P}$ .

L'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$  est le cercle  $(\mathcal{C})$  de diamètre  $[AB]$ .

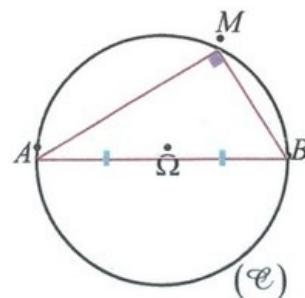
Le centre du cercle  $(\mathcal{C})$  est le point  $\Omega$  milieu du segment  $[AB]$ , et son rayon est  $R = \frac{AB}{2}$ .

Si  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$  et  $M(x, y)$ , alors une équation cartésienne du cercle  $(\mathcal{C})$  est :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

Autrement dit :

$$x^2 + y^2 - (x_A + x_B)x - (y_A + y_B)y + (x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B) = 0$$



### Applications

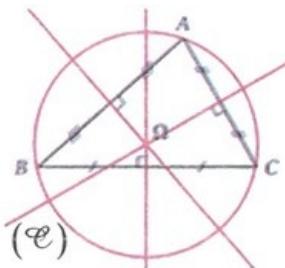
- Déterminer une équation cartésienne du cercle  $(\mathcal{C})$  de diamètre  $[AB]$  dans chacun des cas suivants :

- 1  $A(1; 3)$  et  $B(2; 1)$
- 2  $A(-2; 4)$  et  $B(2; 3)$
- 3  $A(-3; 1)$  et  $B(2; 5)$

## 5-4/ Équation d'un cercle défini par trois points non alignés

### Proposition

Par trois points non alignés  $A$ ,  $B$  et  $C$  passe un seul cercle de centre  $(\mathcal{C})$  le point d'intersection des médiatrices du triangle  $ABC$ , et de rayon  $R = \Omega A$ . Ce cercle est appelé le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .



### Applications

- Déterminer une équation du cercle  $(\mathcal{C})$  circonscrit au triangle  $ABC$  dans les deux cas suivants :

- [1]  $A(2; 1)$  et  $B(4; -1)$  et  $C(0; 3)$
- [2]  $A(3; -1)$  et  $B(5; 3)$  et  $C(1; 1)$

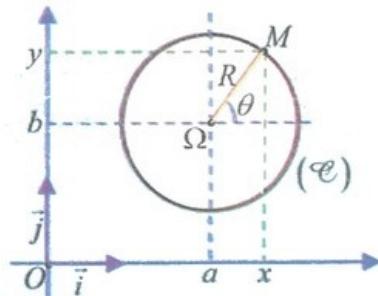
## VI- Représentation paramétrique d'un cercle

### Proposition

Le cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $\Omega(a; b)$  et de rayon  $R$  est l'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique du cercle  $(\mathcal{C})$ .



### Applications

- Donner une représentation paramétrique du cercle  $(\mathcal{C})$  dans les cas suivants :

- [1]  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$
- [2]  $x^2 + y^2 + 4x - 16 = 0$
- [3]  $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 23 = 0$

- Déterminer l'ensemble  $(E)$  des points  $M(x, y)$  du plan tels que :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = 4 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

3. Déterminer une équation cartésienne du cercle  $(\mathcal{C})$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cos t \\ y = -1 + 3 \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

## VII- Ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

### Proposition

Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan  $\mathcal{P}$  vérifiant l'équation  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  où  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$

On pose :  $k = a^2 + b^2 - 4c$

- Si  $k < 0$ , alors l'ensemble  $(\Gamma)$  est vide :  $(\Gamma) = \emptyset$
- Si  $k = 0$ , alors l'ensemble  $(\Gamma)$  est un singleton :  $(\Gamma) = \{\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})\}$
- Si  $k > 0$ , alors l'ensemble  $(\Gamma)$  est le cercle de centre  $\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$  et de rayon  $R = \frac{\sqrt{k}}{2}$ .

### Applications

1. Déterminer l'ensemble  $(E)$  des points  $M(x, y)$  vérifiant l'équation cartésienne correspondante à chacun des cas suivants :

<b>[1]</b> $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$	<b>[2]</b> $x^2 + y^2 - 12x + 14y + 85 = 0$	<b>[3]</b> $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 27 = 0$
--	---	---

<b>[4]</b> $x^2 + y^2 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{24}{5} = 0$	<b>[5]</b> $x^2 + y^2 - 8x - 12 = 0$
<b>[6]</b> $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 18 = 0$	

## IX- Intérieur et extérieur d'un cercle

### Définition

Soit  $(\mathcal{C})$  le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R > 0$ , et  $M$  un point du plan  $\mathcal{P}$ .

- Le point  $M$  est sur le cercle  $(\mathcal{C})$  si et seulement si :  $\Omega M = R$
- Le point  $M$  est à l'intérieur du cercle  $(\mathcal{C})$  si et seulement si :  $\Omega M < R$
- Le point  $M$  est à l'extérieur du cercle  $(\mathcal{C})$  si et seulement si :  $\Omega M > R$

### Proposition

Soit  $(\mathcal{C})$  le cercle d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  où  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ .

Pour tout point  $M(x_0; y_0)$  du plan :

- $M$  est un point du cercle  $(\mathcal{C})$  si et seulement si :  
 $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$

-  $M$  est à l'intérieur du cercle  $(\mathcal{C})$  si et seulement si :

$$x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0$$

-  $M$  est à l'extérieur du cercle  $(\mathcal{C})$  si et seulement si :

$$x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0$$

Ainsi, le cercle  $(\mathcal{C})$  détermine trois parties disjointes dans le plan  $\mathcal{P}$ .

## Applications

1. Déterminer la position du point  $A$  par rapport au cercle  $(\mathcal{C})$  dans chacun des cas suivants :

a)  $(\mathcal{C})$  le cercle de centre  $\Omega(2; 3)$  et de rayon  $R = 1$  et le point  $A(-1; 2)$ .

b)  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$  et le point  $A(0; 1)$ .

c)  $(\mathcal{C}) : \begin{cases} x = 1 + 2 \cos \theta \\ y = 1 + 2 \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$  et le point  $A(2; 1)$ .

2. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

[1]  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 \geq 0$

[2]  $x^2 + y^2 + 2y - 3 < 0$

[3]  $x^2 + y^2 < 4$

3. Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

[1]  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 < 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$

[2]  $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 2y - \frac{11}{4} \geq 0 \\ x + 2y - 3 < 0 \end{cases}$

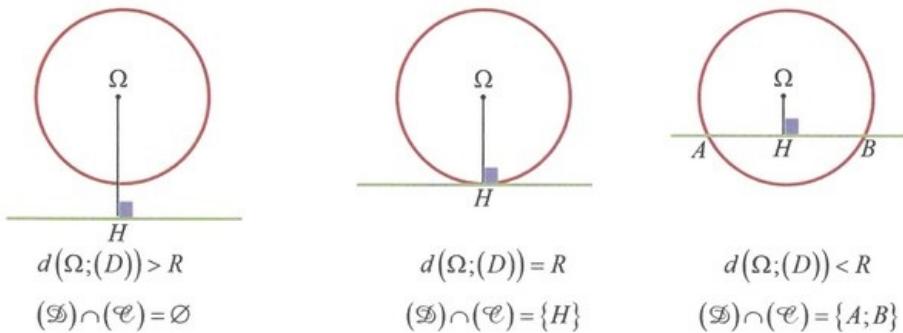
[3]  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 10x - 4y + 25 < 0 \\ x + 2y - 3 > 0 \\ 3x + y + 11 \leq 0 \end{cases}$

## IX- Positions relatives d'une droite et d'un cercle

### Proposition

Soit  $(\mathcal{C})$  le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ , et  $(\mathcal{D})$  une droite dans le plan  $\mathcal{P}$  rapporté à un repère orthonormé.

- Si  $d(\Omega; (\mathcal{D})) > R$ , alors l'intersection de  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{C})$  est vide :  $(2) \cap S? = \emptyset$ .
- Si  $d(\Omega; (\mathcal{D})) = R$ , alors l'intersection de  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{C})$  est le singleton  $\{H\}$  où  $H$  est le point de contact (ou de tangence) de la droite  $(\mathcal{D})$  et du cercle  $(\mathcal{C})$ .
- Si  $d(\Omega; (\mathcal{D})) < R$ , alors l'intersection de  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{C})$  est un bipoint  $\{A; B\}$ .



## Applications

1. Étudier l'intersection de la droite ( $\mathcal{D}$ ) et du cercle ( $\mathcal{C}$ ) dans chacun des cas suivants :

- [1] ( $\mathcal{C}$ ) :  $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$  et ( $\mathcal{D}$ ) :  $2x - y = 0$
- [2] ( $\mathcal{C}$ ) :  $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$  et ( $\mathcal{D}$ ) :  $x - y - 2 = 0$
- [3] ( $\mathcal{C}$ ) :  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$  et ( $\mathcal{D}$ ) :  $x + y - 3 = 0$

## X- Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle

### Proposition

Soit ( $\mathcal{C}$ ) le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ , et  $A(x_0; y_0)$  un point du cercle ( $\mathcal{C}$ ), et ( $T$ ) la tangente au cercle ( $\mathcal{C}$ ) au point  $A$ .

La droite ( $T$ ) est l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan tels que :  $\overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

Si le cercle ( $\mathcal{C}$ ) admet une équation cartésienne de la forme  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , alors une équation de la tangente ( $T$ ) est donnée par :

$$(T) : xx_0 + yy_0 + \frac{1}{2}a(x + x_0) + \frac{1}{2}b(y + y_0) + c = 0$$

