

Sommaire

V- Équation cartésienne d'un cercle

5-1/ Le cercle

5-2/ Équation cartésienne d'un cercle

5-3/ Équation d'un cercle défini par l'un de ses diamètres

5-4/ Équation d'un cercle défini par trois points non alignés

VI- Représentation paramétrique d'un cercle

VII- Ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

IIX- Intérieur et extérieur d'un cercle

IX- Positions relatives d'une droite et d'un cercle

X- Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle

V- Équation cartésienne d'un cercle

5-1/ Le cercle

DéfinitionSoit Ω un point du plan \mathcal{P} et R un réel positif.Le cercle (\mathcal{C}) de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$.On le note : $\mathcal{C}(\Omega; R)$ On a alors : $\mathcal{C}(\Omega; R) \Leftrightarrow \Omega M = R$

5-2/ Équation cartésienne d'un cercle

PropositionUne équation cartésienne du cercle (\mathcal{C}) de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R ($R \geq 0$) est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

que l'on peut écrire $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ où $c = a^2 + b^2 - R^2$.

Applications

1. Écrire une équation cartésienne du cercle (\mathcal{C}) de centre Ω et de rayon R dans chacun des cas suivants :

- 1 $\Omega(2; 4)$ et $R = 3$
- 2 $\Omega(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ et $R = 2\sqrt{2}$
- 3 $\Omega(-1; -3)$ et $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Écrire une équation du cercle (\mathcal{C}) de centre Ω et passant par le point A dans chacun des cas suivants :

- 1 $\Omega(2; 0)$ et $A(2; 4)$
- 2 $\Omega(1; 2)$ et $A(4; -2)$
- 3 $\Omega(-2; 3)$ et $A(2; -1)$

5-3/ Équation d'un cercle défini par l'un de ses diamètres

Proposition

Soit A et B deux points distincts dans le plan \mathcal{P} .

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle (\mathcal{C}) de diamètre $[AB]$.

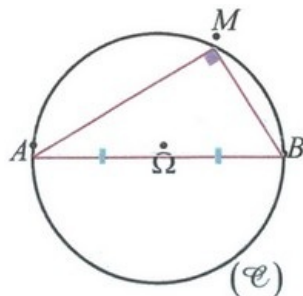
Le centre du cercle (\mathcal{C}) est le point Ω milieu du segment $[AB]$, et son rayon est $R = \frac{AB}{2}$.

Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $M(x, y)$, alors une équation cartésienne du cercle (\mathcal{C}) est :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

Autrement dit :

$$x^2 + y^2 - (x_A + x_B)x - (y_A + y_B)y + (x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B) = 0$$



Applications

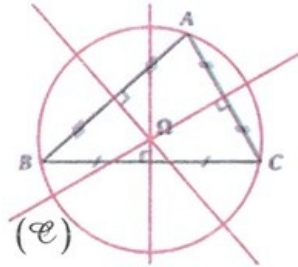
1. Déterminer une équation cartésienne du cercle (\mathcal{C}) de diamètre $[AB]$ dans chacun des cas suivants :

- 1 $A(1; 3)$ et $B(2; 1)$
- 2 $A(-2; 4)$ et $B(2; 3)$
- 3 $A(-3; 1)$ et $B(2; 5)$

5-4/ Équation d'un cercle défini par trois points non alignés

Proposition

Par trois points non alignés A , B et C passe un seul cercle de centre (\mathcal{C}) le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC , et de rayon $R = \Omega A$. Ce cercle est appelé le cercle circonscrit au triangle ABC .



Applications

1. Déterminer une équation du cercle (\mathcal{C}) circonscrit au triangle ABC dans les deux cas suivants :

① $A(2; 1)$ et $B(4; -1)$ et $C(0; 3)$

② $A(3; -1)$ et $B(5; 3)$ et $C(1; 1)$

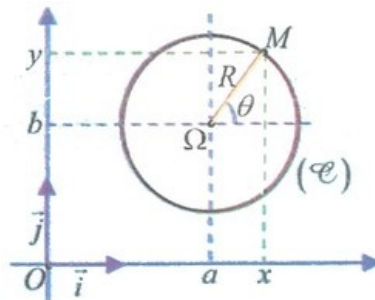
VI- Représentation paramétrique d'un cercle

Proposition

Le cercle (\mathcal{C}) de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique du cercle (\mathcal{C}) .



Applications

1. Donner une représentation paramétrique du cercle (\mathcal{C}) dans les cas suivants :

① $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$

② $x^2 + y^2 + 4x - 16 = 0$

③ $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 23 = 0$

2. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = 4 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

3. Déterminer une équation cartésienne du cercle (\mathcal{C}) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cos t \\ y = -1 + 3 \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

VII- Ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Proposition

Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan \mathcal{P} vérifiant l'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ où $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$

On pose : $k = a^2 + b^2 - 4c$

- Si $k < 0$, alors l'ensemble (Γ) est vide : $(\Gamma) = \emptyset$
- Si $k = 0$, alors l'ensemble (Γ) est un singleton : $(\Gamma) = \left\{ \Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right) \right\}$
- Si $k > 0$, alors l'ensemble (Γ) est le cercle de centre $\Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{k}}{2}$.

Applications

1. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation cartésienne correspondante à chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad & x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0 \\ \boxed{2} \quad & x^2 + y^2 - 12x + 14y + 85 = 0 \\ \boxed{3} \quad & x^2 + y^2 + 8x - 6y + 27 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{4} \quad & x^2 + y^2 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{24}{5} = 0 \\ \boxed{5} \quad & x^2 + y^2 - 8x - 12 = 0 \\ \boxed{6} \quad & x^2 + y^2 - 6x + 6y + 18 = 0 \end{aligned}$$

IIIX- Intérieur et extérieur d'un cercle

Définition

Soit (\mathcal{C}) le cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$, et M un point du plan \mathcal{P} .

- Le point M est sur le cercle (\mathcal{C}) si et seulement si : $\Omega M = R$
- Le point M est à l'intérieur du cercle (\mathcal{C}) si et seulement si : $\Omega M < R$
- Le point M est à l'extérieur du cercle (\mathcal{C}) si et seulement si : $\Omega M > R$

Proposition

Soit (\mathcal{C}) le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ où $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$.

Pour tout point $M(x_0; y_0)$ du plan :

- M est un point du cercle (\mathcal{C}) si et seulement si : $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$

- M est à l'intérieur du cercle (\mathcal{C}) si et seulement si :

$$x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0$$

- M est à l'extérieur du cercle (\mathcal{C}) si et seulement si :

$$x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0$$

Ainsi, le cercle (\mathcal{C}) détermine trois parties disjointes dans le plan \mathcal{P} .

Applications

1. Déterminer la position du point A par rapport au cercle (\mathcal{C}) dans chacun des cas suivants :

a) (\mathcal{C}) le cercle de centre $\Omega(2; 3)$ et de rayon $R = 1$ et le point $A(-1; 2)$.

b) $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ et le point $A(0; 1)$.

c) $(\mathcal{C}) : \begin{cases} x = 1 + 2 \cos \theta \\ y = 1 + 2 \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$ et le point $A(2; 1)$.

2. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$$\boxed{1} \quad x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 \geq 0$$

$$\boxed{2} \quad x^2 + y^2 + 2y - 3 < 0$$

$$\boxed{3} \quad x^2 + y^2 < 4$$

3. Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

$$\boxed{1} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 < 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{2} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - x - 2y - \frac{11}{4} \geq 0 \\ x + 2y - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{3} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 10x - 4y + 25 < 0 \\ x + 2y - 3 > 0 \\ 3x + y + 11 \leq 0 \end{cases}$$

IX- Positions relatives d'une droite et d'un cercle

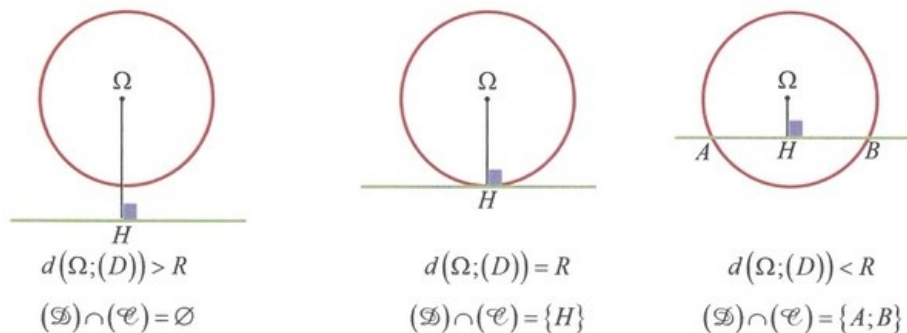
Proposition

Soit (\mathcal{C}) le cercle de centre Ω et de rayon R , et (\mathcal{D}) une droite dans le plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé.

- Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) > R$, alors l'intersection de (\mathcal{D}) et (\mathcal{C}) est vide : $(\mathcal{D}) \cap (\mathcal{C}) = \emptyset$.

- Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) = R$, alors l'intersection de (\mathcal{D}) et (\mathcal{C}) est le singleton $\{H\}$ où H est le point de contact (ou de tangence) de la droite (\mathcal{D}) et du cercle (\mathcal{C}) .

- Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) < R$, alors l'intersection de (\mathcal{D}) et (\mathcal{C}) est un bipoint $\{A; B\}$.



Applications

- Étudier l'intersection de la droite (\mathcal{D}) et du cercle (\mathcal{C}) dans chacun des cas suivants :

- 1 $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ et $(\mathcal{D}) : 2x - y = 0$
- 2 $(\mathcal{C}) : (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$ et $(\mathcal{D}) : x - y - 2 = 0$
- 3 $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ et $(\mathcal{D}) : x + y - 3 = 0$

X- Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle

Proposition

Soit (\mathcal{C}) le cercle de centre Ω et de rayon R , et $A(x_0; y_0)$ un point du cercle (\mathcal{C}) , et (T) la tangente au cercle (\mathcal{C}) au point A .

La droite (T) est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $\overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

Si le cercle (\mathcal{C}) admet une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, alors une équation de la tangente (T) est donnée par :

$$(T) : xx_0 + yy_0 + \frac{1}{2}a(x + x_0) + \frac{1}{2}b(y + y_0) + c = 0$$

