AlloSchool

Mathématiques : 1Bac SM

Séance 7-1-1 : Étude analytique du produit scalaire - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Étude analytique du produit scalaire

1-1/ Expression analytique du produit scalaire

Proposition

Soit $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j}$ deux vecteurs du plan.

Alors : $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = xx' + yy'$; $\overrightarrow{i}\,.\,\overrightarrow{u} = x$; $\overrightarrow{j}\,.\,\overrightarrow{v} = y$

Applications

Soit les vecteurs $\overrightarrow{u} = \frac{3}{2}\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -4\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

Soit les vecteurs $\overrightarrow{u} = \left(\sqrt{3}-1\right)\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \left(\sqrt{3}+1\right)\overrightarrow{i} + \frac{3}{2}\overrightarrow{j}$.

2. A-t-on $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$? Justifier la réponse.

Soit les vecteurs $\overrightarrow{u} = (2m-1)\overrightarrow{i} + 4m\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ où $m \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer m sachant que $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

1-2/ Expression analytique de la norme d'un vecteur et de la distance de deux points

Proposition

Si $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ est un vecteur du plan, alors sa norme est :
$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$
Si $A\left(x_A; y_A\right)$ et $B\left(x_B; y_B\right)$ sont deux points du pian, alors :
$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

Applications

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v}\left(\sqrt{5}-2; \sqrt{5}+2\right)$ et

$\overrightarrow{w} = (2m-1)\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $||\overrightarrow{u}||$, $||\overrightarrow{v}||$ et $||\overrightarrow{w}||$.
2. Déterminer les valeurs de ni pour lesquelles $||\overrightarrow{w}|| = \sqrt{10}$.

On considère dans le plan, les points $A\left(0; 3\right)$, $B\left(-1; 5\right)$ et $C\left(2m+1; m-1\right)$ où $m \in \mathbb{R}$.

3. Calculer les distances AB, AC et BC.
4. Est-ce-que le triangle ABC peut être isocèle ? Justifier la réponse.

1-3/ Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

On a alors :

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right| \leq ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$

- L'égalité $\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right| = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$ aura lieu si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

1-4/ Inégalité triangulaire

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

On a alors :

- L'inégalité triangulaire : $\left|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right| \leq ||\overrightarrow{u}||+||\overrightarrow{v}||$

- L'égalité $\left|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right| = ||\overrightarrow{u}||+||\overrightarrow{v}||$ aura lieu si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et ont le même sens.

Applications

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, Montrer que :

$$\left(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2\right)\ x+y\leq\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)$$

Soit $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $a\neq 0$ et $b\neq 0$.

2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$(a-c)^2+(b-d)^2\geq\frac{(ad-bc)^2}{a^2+b^2}$$

3. Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tous réels $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$:

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2}\leq\sum_{i=1}^n\sqrt{{a_i}^2+{b_i}^2}$$

II- Produit scalaire et angles

2-1/ Repérage polaire d'un vecteur

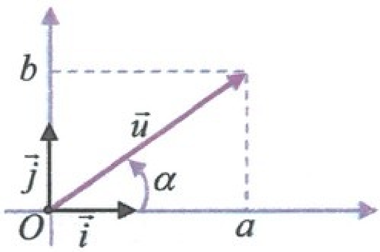
Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul du plan.

Si α désigne une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{u}}\right)$, alors :

$$\overrightarrow{u}=||\overrightarrow{u}||.\left[(\cos\alpha)\overrightarrow{i}+(\sin\alpha)\overrightarrow{j}\right]$$

Donc $a=||\overrightarrow{u}||.\cos\alpha$ et $b=||\overrightarrow{u}||.\sin\alpha$



2-2/ Expression de $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}}\right)$

Soit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ deux vecteurs non nuls et θ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}}\right)$.

On a alors les formules suivantes :

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}} \text{ et } \cos\theta = \frac{det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)}{||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||} = \frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Applications

1. Calculer $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}}\right)$ dans les deux cas suivants :

$$\boxed{1}\ \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \ et\ \overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$$
$$\boxed{2}\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \ et\ \overrightarrow{v} = \left(\sqrt{3}-1\right)\overrightarrow{i} + \left(\sqrt{3}+1\right)\overrightarrow{j}$$

On considère les points : $A(1;3)$, $B(3;1)$ et $C(-3;-1)$.

2. Calculer $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)$.

2-3/ Aire d'un triangle

Proposition

L'aire du triangle ABC est : $S = \frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|$

Remarque

On a aussi : $S = \frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\right|$

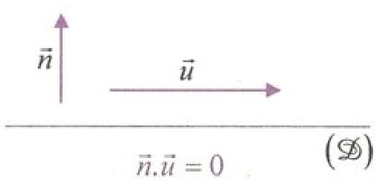
III- Étude analytique de la droite dans le plan

3-1/ Vecteur normal à une droite

Définition

Soit $(\mathscr{D})$ une droite du plan.

Tout vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite $(\mathscr{D})$ est appelé vecteur normal à la droite $(\mathscr{D})$.



Proposition

Soit $(\mathscr{D})$ une droite dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.

- Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont deux vecteurs normaux sur $(\mathscr{D})$, alors ils sont colinéaires.

- Si $\overrightarrow{u}(\alpha;\beta)$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$, alors le vecteur $\overrightarrow{n}(-\beta;\alpha)$ est normal à $(\mathscr{D})$.

- Si une équation cartésienne de $(\mathscr{D})$ est $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$, alors le vecteur est normal à la droite $(\mathscr{D})$.

Applications

On considère les droites $(\mathscr{D}):\ 5x+2y-3=0$ et $(\mathscr{D}'):\ y=2x-3$.

1. Les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont-elles orthogonales ? Justifier la réponse.
2. Déterminer un vecteur normal à la droite $(\mathscr{D})$ dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ (\mathscr{D})\ :\ x+y+3=0$$
$$\boxed{2}\ (\mathscr{D})\ :\ y=x$$
$$\boxed{3}\ (\mathscr{D})\ :\ x=3$$
$$\boxed{4}\ (\mathscr{D})\ :\ 2x-1=0$$

3-2/ Équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal à cette droite

Proposition

Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul et A un point du plan $\mathscr{P}$.

L'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$ est la droite $(\mathscr{D})$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Si $A(x_A;y_A)$ et $\overrightarrow{n}(a;b)$, alors une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$ est :

$$(\mathscr{D}):\ a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$$

Applications

1. Écrire une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$ passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ A(2;1)\ et\ \overrightarrow{n}(3;-2)$$
$$\boxed{2}\ A\left(-\tfrac{1}{2};3\right)\ et\ \overrightarrow{n}=2\overrightarrow{j}$$
$$\boxed{3}\ A\left(1;\sqrt{3}\right)\ et\ \overrightarrow{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{j}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$, on considère le point $A(0;2)$ et la droite (D) d'équation cartésienne $2x+\sqrt{7}y-6=0$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par le point A

et orthogonale à (D).

3-3/ Condition de perpendicularité de deux droites

Proposition

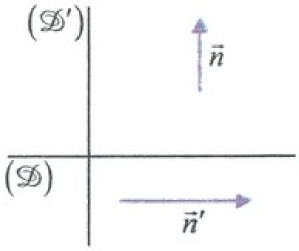
Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites du plan $\mathscr{P}$.

- Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont deux vecteurs normaux respectivement aux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$, alors :

$$(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}') \Leftrightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n'} \Leftrightarrow \overrightarrow{n} \,.\, \overrightarrow{n'} = 0$$

- Si les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont définies respectivement par les équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, alors :

$$(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$



Applications

On considère les droites $(D):\ 5x + 2y - 3 = 0$ et $(D'):\ y = 2x - 3$.

1. Les droites (D) et (D') sont-elles perpendiculaires ? Justifier la réponse.

On considère les droites $(\Delta_1):\ (2m - 3)x - 5y + 11 = 0$ et $(\Delta_2):\ 2x + 3y + 5 = 0$ où $m \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer la valeur de m pour que les droites (Δ_1) et (Δ_2) soient perpendiculaires.

On considère les points $A(1;2)$, $B(-3;-6)$, $C(0;1)$ et $D(2;0)$.

3. Montrer que $(AB) \perp (CD)$.

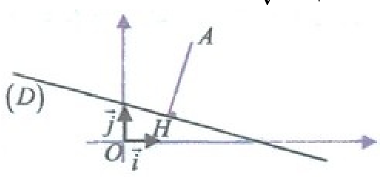
3-4/ Distance d'un point à une droite

Proposition

Soit $(\mathscr{D})$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$ et $A\,(x_A; y_A)$ un point du plan.

La distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$ est donnée par :

$$d\,(A;(\mathscr{D})) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Applications

1. Calculer la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$ dans chacun des cas suivants

:

$$\boxed{1}\ A\left(2;3\right)\ et\ \ (\mathscr{D}):\ 2x-5y+4=0$$
$$\boxed{2}\ A\left(-2;3\right)\ et\ \ (\mathscr{D}):\ x-3y+5=0$$
$$\boxed{3}\ A\left(-4;3\right)\ et\ \ (\mathscr{D}):\ 3x-5=0$$
$$\boxed{4}\ A\left(0;1\right)\ et\ \ (\mathscr{D}):\ y=-2x+3$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$, on considère les points $A\left(1;-1\right)$, $B\left(-1;2\right)$ et $C\left(-3;-2\right)$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\left(AB\right)$.
3. Calculer $d\left(C;\left(AB\right)\right)$, puis en déduire l'aire du triangle ABC.
4. Déterminer le couple de coordonnées du point H projeté orthogonal du point C sur la droite $\left(AB\right)$.