

Sommaire

## I- Généralités sur les suites numériques

## 1-1/ Définitions et notations

## 1-2/ Modes usuels de génération d'une suite numérique

## II- Suite majorée - suite minorée - suite bornée

## III- Monotonie d'une suite numérique

## IV- Suite arithmétique - suite géométrique

## 4-1/ Suite arithmétique

## 4-2/ Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

## 4-3/ Suite géométrique

## 4-4/ Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

## I- Généralités sur les suites numériques

## 1-1/ Définitions et notations

**Définition**

On appelle suite numérique toute fonction  $u$  de  $\mathbb{N}$  (ou une partie  $I$  de  $\mathbb{N}$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

L'image d'un entier  $n$  de  $\mathbb{N}$  (ou de  $I$ ) par la suite  $u$  est notée  $u_n$ .

Le nombre  $u_n$  s'appelle le terme général de la suite  $u$ , c'est aussi le terme de rang  $n$  de la suite  $u$ .

**Remarques**

La notation  $u_n$  se lit aussi : «  $u$  indice  $n$  ».

Il ne faut pas confondre la suite  $(u_n)$  et son terme général  $u_n$ , terme d'indice  $n$  de la suite  $(u_n)$ .

Les suites rencontrées en pratique sont souvent définies sur  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{N}^*$ . On peut toujours ramener l'étude d'une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  à une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , indexée par  $\mathbb{N}$  en posant :  $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n = u_{n+n_0}$

## 1-2/ Modes usuels de génération d'une suite numérique

Une suite  $(u_n)$  peut être définie :

- Par une formulation explicite de son terme général  $u_n$  :

En particulier  $u_n = f(n)$ , où  $f$  est une fonction numérique donnée.

- Par la donnée de son premier terme (ou de ses premiers termes) et une relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases} \dots \text{etc.}$$

### Application

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite numérique définie par  $u_1 = \frac{1}{4}$  et  $u_{n+1} = \frac{n+1}{4n} u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Calculer  $u_2, u_3, u_4$  et  $u_5$ .

## II- Suite majorée - suite minorée - suite bornée

### Définition

On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que :

$$(\forall n \in I) u_n \leq M$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que :

$$(\forall n \in I) u_n \geq m$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

### Remarques

- On prendra garde au fait que, dans la définition, les réels  $M$  et  $m$  sont des constantes et dépendent pas de l'indice de la suite.

Par exemple, la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \sqrt{n}$  vérifie l'inégalité  $u_n \leq n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , mais n'est pas une suite majorée.

- S'il existe un réel  $S \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|u_n| \leq S$ , alors la suite  $(u_n)$  est bornée.

### Applications

Soit  $(a_n)$  la suite numérique définie par :  $a_n = \frac{2n+5}{n+1}$

1. Montrer que la suite  $(a_n)$  est majorée par 5 et minorée par 2.

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 \leq u_n < 2$

Soit  $(v_n)$  la suite numérique définie par  $v_0 = 2$  et  $v_{n+1} = \sqrt{6 + v_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 < v_n < 3$

Soit  $(w_n)_{n \geq 2}$  la suite numérique définie par :  $w_n = \frac{5^n + 3^n}{5^n - 2 \times 3^n}$

4. Vérifier que pour tout entiers  $n \geq 2$  :  $w_n = 1 + \frac{3}{\left(\frac{5}{3}\right)^n - 2}$ , puis en déduire que la

suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  est bornée.

### III- Monotonie d'une suite numérique

#### Définition

On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est croissante si :

$$(\forall (n; m) \in I^2) (m \geq n \Rightarrow u_m \geq u_n)$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est décroissante si :

$$(\forall (n; m) \in I^2) (m \geq n \Rightarrow u_m \leq u_n)$$

#### Remarques

- Si la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est croissante alors :  $(\forall n \in I) u_n \geq u_{n_0}$
- Si la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est décroissante alors :  $(\forall n \in I) u_n \leq u_{n_0}$
- On définit de même une suite strictement croissante et strictement décroissante. Il suffit de remplacer dans la définition précédente, les symboles «  $\leq$  » et «  $\geq$  » par les symboles «  $<$  » et «  $>$  ».

#### Proposition

La suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est croissante si, et seulement si :  $(\forall n \in I) u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est strictement croissante si, et seulement si :

$$(\forall n \in I) u_{n+1} - u_n > 0$$

La suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est décroissante si, et seulement si :  $(\forall n \in I) u_{n+1} - u_n \leq 0$

La suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est strictement décroissante si, et seulement si :

$$(\forall n \in I) u_{n+1} - u_n < 0$$

La suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est constante si, et seulement si :  $(\forall n \in I) u_{n+1} = u_n$

La suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est monotone si, et seulement si, elle est croissante ou décroissante.

#### Remarques

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite numérique telle que :  $(\forall n \in I) u_n > 0$

On a pour tout  $n \in I$  : le signe de  $u_{n+1} - u_n$  est celui donc de  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$

$$\left[ u_{n+1} - u_n = u_n \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right) \right]$$

Ainsi, pour étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$ , on peut comparer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et 1 et on a :

- La suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est croissante si, et seulement si :  $(\forall n \in I) \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

- La suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est décroissante si, et seulement si :  $(\forall n \in I) \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

#### Applications

1. Étudier la monotonie des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $u_n = \frac{2n+1}{3n+1}$  et  $v_n = 3^{2n-1}$ .

On considère la suite numérique  $(w_n)$  définie par  $w_0 = 6$  et  $w_{n+1} = 4 - \frac{3}{w_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) w_n > 3$

3. Montrer que la suite  $(w_n)$  est décroissante, puis en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 3 < w_n \leq 6$$

Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  les deux suites numériques définies par  $a_0 = 4$  et  $b_0 = 1$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

4. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $a_n \geq b_n$

5. Montrer que la suite  $(b_n)$  est croissante et que la suite  $(a_n)$  est décroissante.

Soit  $(t_n)$  une suite réelle vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $0 \leq t_n \leq 1$  et

$$(1 - t_n)t_{n+1} > \frac{1}{4}.$$

6. Prouver que la suite  $(t_n)$  est strictement croissante.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2} (u_n + \sqrt{u_n} + 2)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

7. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 \leq u_n \leq 4$

8. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} (2 - \sqrt{u_n}) (1 + \sqrt{u_n})$ , puis déduire la monotonie de  $(u_n)$ .

9. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 4 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4} (4 - u_n)$

10. En déduire par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 4 - u_n \leq 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n$

## IV- Suite arithmétique - suite géométrique

### 4-1/ Suite arithmétique

#### Définition

On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est arithmétique s'il existe un réel  $r$  (indépendant de  $n$ ) tel que :

$$(\forall n \in I) u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre  $r$  est appelé la raison de la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$ .

#### Applications

Soit  $(w_n)$  la suite numérique définie par :  $w_n = -\sqrt{3}n + \frac{3}{2}$

1. Montrer que la suite  $(w_n)$  est arithmétique et déterminer sa raison  $r$ .

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

2. Montrer que la suite  $(v_n)$  est arithmétique et déterminer sa raison  $r$ .

Soit  $(b_n)$  la suite numérique définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) b_0 + b_1 + \dots + b_n = 4n^2 - 3n$

3. Montrer que la suite  $(b_n)$  est arithmétique dont on déterminera la raison et le

premier terme.

### Proposition

Pour que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  soit arithmétique, il faut et il suffit que :

$$(\forall n \geq n_0) 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$$

### Remarque

Pour que trois réels  $x$ ,  $y$  et  $z$ , choisis dans cet ordre, soient des termes consécutifs d'une suite arithmétique, il faut et il suffit que :  $x + z = 2y$

### Proposition

Si  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite arithmétique de raison  $r$ , alors pour tout  $(n; p) \in I^2$  :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

### Remarques

Si la suite  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $r$ , alors :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_0 + nr$

Si la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est arithmétique de raison  $r$ , alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_1 + (n - 1)r$$

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

- Si  $r > 0$ , alors la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est strictement croissante.

- Si  $r < 0$ , alors la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est strictement décroissante.

### Applications

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$  telle que : 
$$\begin{cases} u_0 - u_4 = 6 \\ 2u_0 + u_4 = 3 \end{cases}$$

1. Déterminer  $u_0$ ,  $u_4$  et  $r$ .
2. Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis en déduire  $u_{100}$ .

Soit  $(v_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$  telle que : 
$$\begin{cases} v_2 + v_3 + v_4 = 15 \\ v_6 = 20 \end{cases}$$

3. Déterminer  $v_0$  et  $r$ , puis en déduire l'expression du terme général  $v_n$  en fonction de  $n$ .

Soit  $(w_n)$  la suite numérique définie par  $w_0 = 1$  et  $w_{n+1} = \frac{5w_n}{2w_n+5}$ .

On pose :  $(\forall n \in \mathbb{N}) t_n = \frac{1}{w_n}$

4. Calculer  $w_1$  et  $w_2$ .
5. Vérifier que la suite  $(t_n)$  est arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.
6. Exprimer  $t_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$ .

## 4-2/ Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

### Proposition

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite arithmétique.

On pose  $S_n = u_p + u_{p-1} + \dots + u_n$  où  $(n; p) \in \mathbb{N}^2$  et  $n \geq p \geq n_0$ .

Alors :  $S_n = \frac{n-p+1}{2} (u_p + u_n)$

### Remarques

- La somme  $S_n = u_p + u_{p-1} + \dots + u_n$  peut aussi s'écrire simplement :

$$S_n = \sum_{k=p}^n u_k$$

Cette somme contient  $(n - p + 1)$  termes.

- Dans le cas où  $p = 0$ , on obtient :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \frac{n+1}{2} (u_0 + u_n)$

- Dans le cas où  $p = 1$ , on obtient :  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \frac{n}{2} (u_1 + u_n)$

- De façon générale, la somme de termes successifs d'une suite arithmétique est égale au nombre de termes multiplié par la moyenne arithmétique des termes extrêmes.

$$\begin{aligned} u_p + u_{p-1} + \dots + u_n &= \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2} \\ &= \frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2} \end{aligned}$$

### Applications

1. Calculer la somme :  $S_n = -3 + 1 + 5 + \dots + (4n + 1)$

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$  telle que :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{26} = 1144 \text{ et } u_{26} = 94$$

2. Calculer  $u_1$  et  $r$ , puis exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ .

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = an + b$

3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est arithmétique puis exprimer en fonction de  $n$  la

$$\text{somme : } S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + 2n - 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = u_{n+1} - u_n$

4. Vérifier que la suite  $(v_n)$  est arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

5. Calculer la somme  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$  en fonction de  $n$ .

6. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

## 4-3/ Suite géométrique

### Définition

On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est géométrique s'il existe un réel  $q$  (indépendant de  $n$ ) tel que :

$$(\forall n \in I) u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre  $q$  est appelé la raison de la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$ .

### Applications

Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites numériques définies par  $a_n = (\sqrt{2} - 1)^n$  et  $b_n = 3 \times \frac{\sqrt{5}}{2^{n-1}}$ .

1. Montrer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont géométriques.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = \frac{9u_n}{4u_n+3}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \neq 0$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = 2 - \frac{3}{u_n}$

3. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Soit  $(x_n)$  la suite numérique définie par  $x_0 = 2$  et  $x_{n+1} = \frac{10+x_n}{3}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $y_n = x_n - 5$

4. Montrer que la suite  $(y_n)$  est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

### Proposition

Pour que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  soit géométrique, il faut et il suffit que :

$$(\forall n \geq n_0) u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2}$$

### Remarque

Pour que trois réels  $x$ ,  $y$  et  $z$ , choisis dans cet ordre, soient des termes consécutifs d'une suite géométrique, il faut et il suffit que :  $x \cdot z = y^2$

### Remarques

Si la suite  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $q$ , alors :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_0 + nq$

Si la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est arithmétique de raison  $q$ , alors :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_1 + (n-1)q$

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite arithmétique de raison  $q$ .

- Si  $u_{n_0} > 0$  et  $q > 1$ , alors la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est strictement croissante.

- Si  $u_{n_0} > 0$  et  $0 < q < 1$ , alors la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est strictement décroissante.

### Applications

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique à termes positifs tels que  $u_4 = 0,84$  et  $u_6 = 5,25$

1. Calculer la raison  $q$  de cette suite et le premier terme  $u_0$ .

2. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

3. Préciser la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_4 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = 2u_n - 3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = u_n - 3$

4. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

5. Exprimer  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de  $n$ .

Soit  $a, b$  et  $c$  trois termes consécutifs d'une suite géométrique tels que :

$$\begin{cases} a + b + c = 36,75 \\ abc = 343 \end{cases}$$

6. Déterminer  $a, b$  et  $c$ .

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$  et

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}(7u_{n+1} - 2u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_{n+1} = u_{n+1} - 2u_n$  et  $w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ .

7. Calculer  $v_1$  et  $w_1$ .

8. Montrer que les suites  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(w_n)_{n \geq 1}$  sont géométriques.

9. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

## 4-4/ Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

### Proposition

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ .

On pose  $S_n = u_p + u_{p-1} + \dots + u_n$  où  $(n; p) \in \mathbb{N}^2$  et  $n \geq p \geq n_0$ .

$$\text{Alors : } S_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

### Remarques

- Dans le cas où  $p = 0$ , on obtient  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  et  $S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$

- Dans le cas où  $p = 1$ , on obtient :  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Si  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite géométrique de raison  $q = 1$ , alors :

$$\sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1)u_p$$

De façon générale, la somme de termes successifs d'une suite géométrique peut être retenue par :

$$\begin{aligned} u_p + u_{p-1} + \dots + u_n &= u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \\ &= 1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \end{aligned}$$

## IV- Suite arithmétique - suite géométrique $q \neq 1$

### Applications

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = u_{n+1} - u_n$  est géométrique.

2. Calculer en fonction de  $n$  la somme  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ , puis en déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$

3. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) S_n (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$

4. Montrer que :

$$\sqrt{u_1 u_2} + \sqrt{u_3 u_4} + \dots + \sqrt{u_{2n-1} u_{2n}} = \sqrt{u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1}} \times \sqrt{u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}}$$