AlloSchool

Mathématiques : 1Bac SM

Séance 4-2-1 : Généralités sur les fonctions - Partie 2 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

VII- Représentation graphique de quelques fonctions usuelles

7-1/ La fonction trinôme du second degré - parabole

7-2/ La fonction homographique - hyperbole

7-3/ La fonction $x \mapsto ax^3 \ (a \in \mathbb{R})$

7-4/ La fonction $x \mapsto \sqrt{x+a} \ (a \in \mathbb{R})$

7-5/ La fonction partie entière

IIX- Composée de deux fonctions numériques

IX- Fonction périodique

VII- Représentation graphique de quelques fonctions usuelles

7-1/ La fonction trinôme du second degré - parabole

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

- Tableaux de variations :

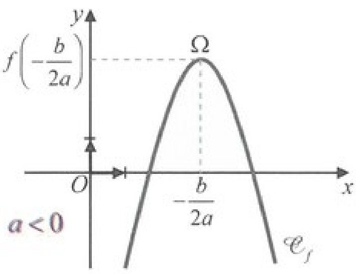
$a > 0$

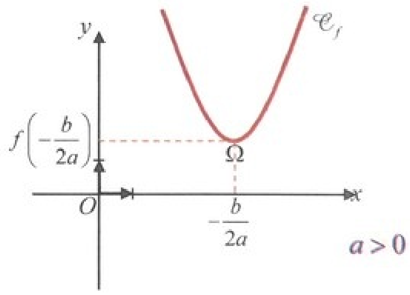
x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

- Courbes représentatives :





$\mathscr{C}_f$ est une parabole de sommet $\Omega\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ et d'axe de symétrie d'équation $x=-\frac{b}{2a}$.

Applications

1. Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis tracer sa courbe représentative :

$$.f(x)=-2x^2+x+1 \;\;;\;\; g(x)=x^2+2x+2 \;\;;\;\; h(x)=-x^2+|x|$$

7-2/ La fonction homographique - hyperbole

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des réels avec $c\neq 0$, et $ad-bc\neq 0$.

On pose : $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

- Tableaux de variations :

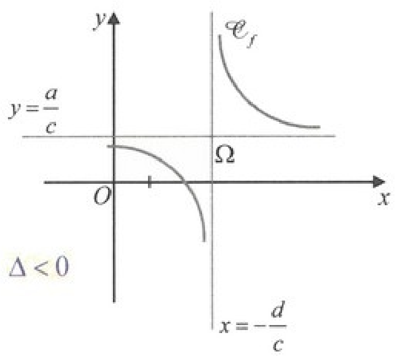
$\Delta>0$

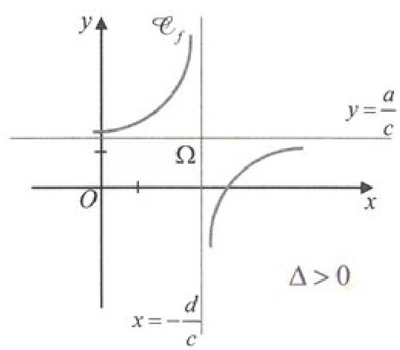
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

$\Delta<0$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

- Courbes représentatives :





$\mathscr{C}_f$ est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$.

1. Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis

tracer sa courbe représentative :

$$.f(x)=\frac{2x+1}{x-1}\ ;\ g(x)=\frac{3x+1}{x+1}\ ;\ h(x)=-1+\frac{1}{x}\ ;\ k(x)=\frac{|x|}{|x|+2}$$

7-3/ La fonction $x \mapsto ax^3 \ (a \in \mathbb{R})$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3$ où a est un réel non nul.

- Tableaux de variations :

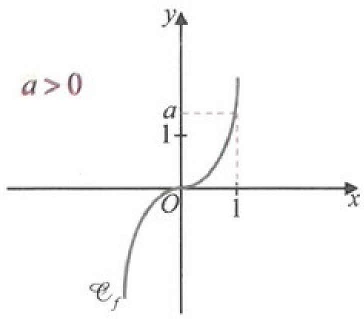
x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	

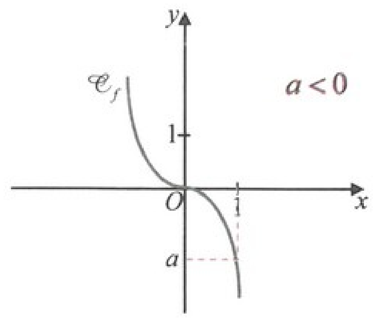
$a>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	

$a<0$

- Courbes représentatives :





La fonction $f\ :\ x \mapsto ax^3$ est impaire et sa courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe aussi par le point de coordonnées $(1;a)$ car $f(1)=a$.

1. Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes puis tracer sa courbe représentative :

$$.f(x)=x^3\ ;\ g(x)=-\frac{1}{2}x^3\ ;\ h(x)=\frac{1}{4}x^2\,|x|$$

7-4/ La fonction $x \mapsto \sqrt{x+a} \ (a \in \mathbb{R})$

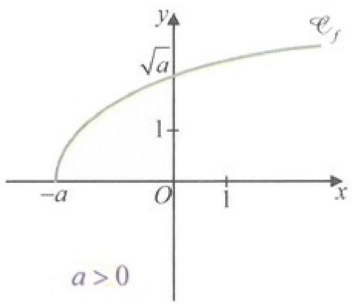
Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x+a}$ où a est un nombre réel.

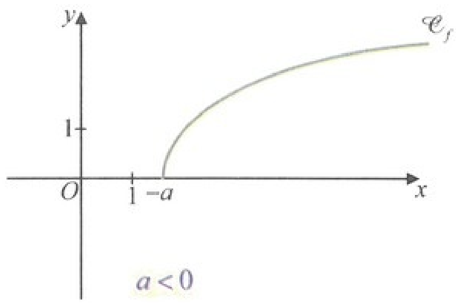
La fonction f est définie et strictement croissante sur l'intervalle $[-a;+\infty[$.

- Tableaux de variations :

x	$-a$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	

- Courbes représentatives :





7-5/ La fonction partie entière

Définition

Soit x un nombre réel.

La partie entière de x est le plus grand entier relatif n qui est inférieur ou égal à x.

On la note $E\left(x\right)$ ou $[x]$.

Applications

1. Déterminer la partie entière de chacun des nombres suivants :

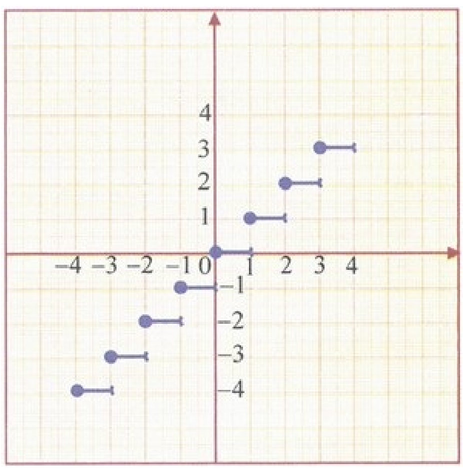
$$\frac{17}{3}\ ;\ -\frac{2020}{19}\ ;\ -2018\ ;\ \frac{24}{25}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{n}{n+1}\ ;\ \frac{n+1}{n}\ ;\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

Proposition

Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $E\left(x\right)\leq x<E\left(x\right)+1$ et $x-1<E\left(x\right)\leq x$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $E\left(x\right)=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{Z}$: $E\left(n+x\right)=E\left(x\right)+n$



Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$E\left(x\right)=0$ $E\left(x\right)=2$ $E\left(x\right)=-3$ $3E\left(x\right)-1=0$	$E\left(x\right)<2$ $E\left(x\right)\geq -1$ $-1\leq E\left(x\right)<3$ $2E\left(x\right)+3<0$

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right)=x-E\left(x\right)$

2. Calculer : $f(-5)$; $f\left(\sqrt{2}\right)$; $f(8)$; $f\left(\frac{3}{2}\right)$; $f(5,2)$
3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 \leq f(x) < 1$
4. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-6;6]$.

IIX- Composée de deux fonctions numériques

Définition

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur deux ensembles I et J tels que : $f(I) \subset J$

La fonction numérique h définie sur I par $h(x) = g(f(x))$ est appelée composée des fonctions f et g dans cet ordre.

Elle est notée $g \circ f$ (se lit : g rond f).

On a alors : $(\forall x \in I)\ g \circ f(x) = g(f(x))$

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{6em}}_{g\,o\,f(x)}$$

Remarques

- On n'a pas en général : $g \circ f = f \circ g$

- On a $D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\right\}$ et
$D_{f\circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\right\}$.

- Pour décomposer une fonction, les conventions de priorité de calcul (entre puissance, produit, somme, ...) permettent de déterminer les fonctions de référence et l'ordre dans lequel les enchaîner.

Applications

1. Définir les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$
$$\boxed{2}\ f(x) = 2x-1 \text{ et } g(x) = \frac{x-1}{x+1}$$
$$\boxed{3}\ f(x) = x^2+2 \text{ et } g(x) = \sqrt{x}$$
$$\boxed{4}\ f(x) = \sqrt{x^2-1} \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2-x}$$

2. Décomposer la fonction f en deux fonctions dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ f(x) = (x-1)^3$$
$$\boxed{2}\ f(x) = \sqrt{2-5x}$$
$$\boxed{3}\ f(x) = 3 - \frac{1}{(2x-1)^2}$$

Proposition

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur deux ensembles I et J tels que : $f(I) \subset J$

Si f et g ont le même sens de variation, alors $g \circ f$ est croissante (éventuellement strictement croissante) sur l'intervalle I.

Si f et g ont des sens de variation contraires, alors $g \circ f$ est décroissante (éventuellement strictement décroissante) sur l'intervalle I.

Applications

1. En utilisant la propriété de la monotonie de la composée de deux fonctions, étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

$\boxed{1}\ f(x) = 1 + \frac{5}{x^3}\ et\ I = \mathbb{R}^-$ $\boxed{2}\ f(x) = \frac{-3}{x^2+1}\ et\ I = \mathbb{R}^+$ $\boxed{3}\ f(x) = x^4 + x^2\ et\ I = \mathbb{R}^+$	$\boxed{4}\ f(x) = \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\ et\ I = \Big[0; \pi\Big[$ $\boxed{5}\ f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1}\ et\ I = \Big]-\infty; -1\Big[$ $\boxed{6}\ f(x) = 1 + \frac{1}{\sin x}\ et\ I = \big]0; \frac{\pi}{2}\big[$

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{2x^2-4x+3}$

2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \frac{1}{2} < f(x) \leq 1$

On considère les fonctions numériques u et v définies par $u(x) = x^2 - 2x$ et $v(x) = \frac{x+2}{2x+3}$.

3. Donner le tableau de variations de chacune des fonctions u et v.
4. En utilisant les variations des fonctions n et v, étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[1; +\infty[$ et $]-\infty; 1]$.

IX- Fonction périodique

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

On dit que f est périodique s'il existe un réel non nul T tel que pour tout $x \in D_f$:

$$(x+T) \in D_f \text{ et } (x-T) \in D_f \text{ et } f(x+T) = f(x)$$

Le nombre réel T est appelé alors une période de f.

La plus petite période strictement positive de la fonction f (lorsqu'elle existe) est appelée la période de la fonction f.

Applications

Soit a un réel strictement positif.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \tan(ax)$ est périodique et donner sa période.
2. Déterminer la période de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 \;:\; x \mapsto \cos^2 x$$
$$f_2 \;:\; x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$f_3 \;:\; x \mapsto \sin(3x) + \cos(2x)$$

$$f_4 \ : \ x \mapsto \tan(3x) - \cos(4x)$$

3. Montrer que la fonction $x \mapsto x - E(x)$ est périodique de période égale à 1.

Proposition

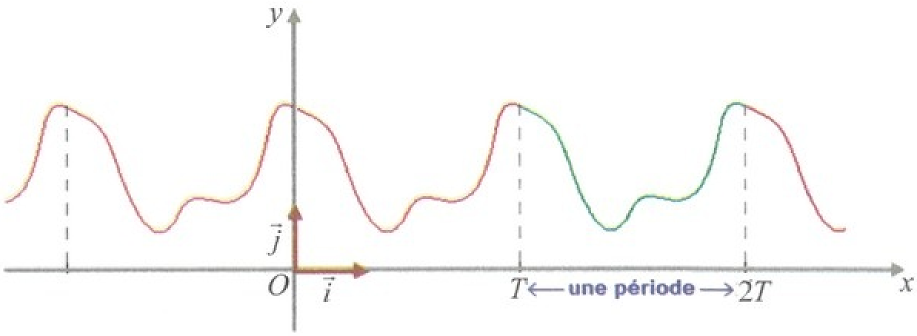
Soit f une fonction périodique de période T et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, le nombre kT est aussi une période de la fonction f.

La courbe de $\mathscr{C}_f$ est invariante par toute translation de vecteur $kT.\ \vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est un réel donné, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est la réunion des images de l'ensemble $\left\{M(x; f(x)) / x \in D_f \cap \left[x_0; x_0 + T\right[\right\}$ par toutes les translations de vecteur $kT.\ \vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, pour étudier une fonction périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur T. (Très souvent, on choisit un des deux intervalles $[0; T[$ ou $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right[$).



Applications

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T = 3$ et telle que $(\forall x \in [0; 3])\ f(x) = |x - 2|$.

1. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $I = [-6; 9]$.
2. Calculer : $f(9,78)$; $f(-8,75)$; $f(2020)$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose : $I_k = [3k; 3(k+1)[$

3. Calculer $f(x)$ en fonction de x et k lorsque $x \in I_k$.