

## Sommaire

### I- Ensemble de définition - parité d'une fonction

1-1/ Ensemble de définition d'une fonction numérique

1-2/ Parité d'une fonction numérique

### II- Monotonie d'une fonction numérique

2-1/ Sens de variations d'une fonction (Rappels)

2-2/ Monotonie et parité

2-3/ Variations des fonctions  $f + \lambda$  et  $\lambda f$

### III- Comparaison de deux fonctions numériques

3-1/ Fonction positive - fonction négative

3-2/ Comparaison de deux fonctions numériques

### IV- Fonction majorée - fonction minorée - fonction bornée

### V- Extremums d'une fonction numérique

---

### I- Ensemble de définition - parité d'une fonction

1-1/ Ensemble de définition d'une fonction numérique

#### **Définition**

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

Une fonction  $f$  définie d'un ensemble  $A$  dans  $\mathbb{R}$  est la donnée pour chaque élément de  $A$  d'un unique élément  $y$  de  $\mathbb{R}$  appelé image de  $x$ .

On note alors  $y = f(x)$ .

L'ensemble  $A$  des nombres réels qui possèdent une image par  $f$ , est appelé ensemble de définition de la fonction numérique  $f$ .

Il est noté traditionnellement  $D_f$ .

#### **Remarque**

L'ensemble de définition d'une fonction  $f$  est la plus grande partie de  $\mathbb{R}$  sur laquelle on peut calculer la valeur de  $f(x_0)$  en tout point  $x_0$  de cette partie.

On a donc :  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$

En pratique, on utilise souvent l'équivalence :  $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) \in \mathbb{R})$

## Applications

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1} f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-1}$$

$$\boxed{2} f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-5x-6}}$$

$$\boxed{3} f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-5x-6}}$$

$$\boxed{4} f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{2|x|-1}$$

$$\boxed{5} f(x) = \frac{\tan x}{\cos x-1}$$

$$\boxed{6} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x + \sin x - 2}$$

## 1-2/ Parité d'une fonction numérique

### Définition

Soit  $f$  une fonction numérique et  $D_f$  son ensemble de définition.

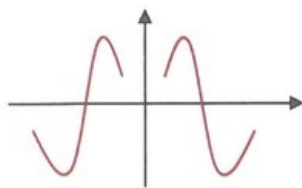
- On dit que la fonction  $f$  est paire si pour tout  $x \in D_f$  :  $-x \in D_f$  et  $f(-x) = f(x)$

- On dit que la fonction  $f$  est impaire si pour tout  $x \in D_f$  :  $-x \in D_f$  et  $f(-x) = -f(x)$

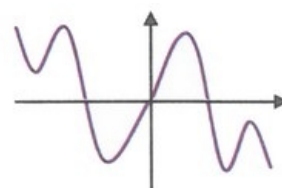
### Proposition

Si  $f$  est une fonction paire, alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe  $\mathcal{C}_f$ .

Si  $f$  est une fonction impaire, alors l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe  $\mathcal{C}_f$ .



Graphe d'une fonction paire



Graphe d'une fonction impaire

## Applications

- Étudier la parité de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1} f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$$

$$\boxed{2} f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\boxed{3} f(x) = x^3 - x^2 + 1$$

$$\boxed{4} f(x) = \frac{\sin x}{2 \cos x - 1}$$

$$\boxed{5} f(x) = \frac{x^4}{x^3-1}$$

$$\boxed{6} f(x) = \frac{|x|}{x^4+1}$$

## II- Monotonie d'une fonction numérique

### 2-1/ Sens de variations d'une fonction (Rappels)

## Définition

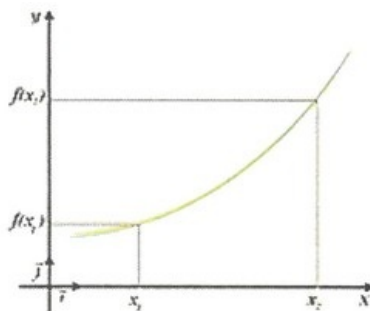
Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$  inclus dans son ensemble de définition.

On dit que la fonction  $f$  est croissante sur  $I$  si ;

$$\forall (x_1; x_2) \in I^2 \quad (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$$

On dit que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$  si :

$$\forall (x_1; x_2) \in I^2 \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

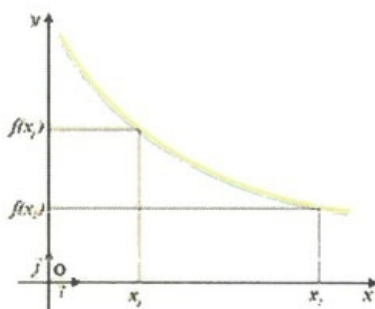


On dit que la fonction  $f$  est décroissante sur  $I$  si :

$$\forall (x_1; x_2) \in I^2 \quad (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$$

On dit que la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  si :

$$\forall (x_1; x_2) \in I^2 \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$



## Proposition

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$ , et  $x_1$  et  $x_2$  deux éléments distincts de  $I$ .

Le nombre  $T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$  est appelé taux de variation (ou d'accroissement) de la fonction  $f$  entre  $x_1$  et  $x_2$ . De plus, on a les propriétés suivantes :

-  $f$  est croissante sur  $I$  si, et seulement si :

$$\forall (x_1; x_2) \in I^2 \quad (x_1 \neq x_2 \Rightarrow T(x_1; x_2) \geq 0)$$

-  $f$  est strictement croissante sur  $I$  si, et seulement si :

$$\forall (x_1; x_2) \in I^2 \quad (x_1 \neq x_2 \Rightarrow T(x_1; x_2) > 0)$$

-  $f$  est décroissante sur  $I$  si, et seulement si :

$$\forall (x_1; x_2) \in I^2 \quad (x_1 \neq x_2 \Rightarrow T(x_1; x_2) \leq 0)$$

-  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  si, et seulement si :

$$\forall (x_1; x_2) \in I^2 \quad (x_1 \neq x_2 \Rightarrow T(x_1; x_2) < 0)$$

## Applications

1. Étudier les variations de la fonction numérique  $f$  sur les intervalles  $I$  et  $J$  dans les deux cas suivants :

$$\boxed{1} \quad f(x) = \frac{2x-3}{x+1} ; I = ]-1; +\infty[ ; J = ]-\infty; -1[$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} ; I = ]-\infty; 1] ; J = [3; +\infty[$$

## 2-2/ Monotonie et parité

### Proposition

Soit  $f$  une fonction numérique d'ensemble de définition  $D_f$  symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que pour tout  $x \in D_f : -x \in D_f$ ).

Pour tout intervalle  $I$  inclus dans  $\mathbb{R}^+ \cap D_f$ , on pose :  $I' = \{-x/x \in I\}$

Alors :

- Si la fonction  $f$  est paire, alors les sens de monotonie sur  $I$  et  $I'$  sont opposés.
- Si la fonction  $f$  est impaire, alors les sens de monotonie sur  $I$  et  $I'$  sont identiques.

### Applications

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = x + \frac{2}{x}$

1. Étudier la parité de la fonction  $f$ .
2. Étudier la monotonie de la fonction  $f$  sur chacun des intervalles  $]0; \sqrt{2}]$  et  $[\sqrt{2}; +\infty[$ .
3. En déduire la monotonie de la fonction  $f$  sur chacun des intervalles  $[-\sqrt{2}; 0[$  et  $] -\infty; -\sqrt{2}]$ .

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{|x|}{x^2 + |x| + 1}$

4. Étudier la parité de la fonction  $g$ .
5. Étudier la monotonie de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
6. En déduire la monotonie de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}^-$ , puis dresser son tableau de variations.

Soit  $h$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = x + |2x - 3| - |2x + 3|$

7. Montrer que la fonction  $h$  est impaire.
8. Étudier la monotonie de la fonction  $h$  sur chacun des intervalles  $0; \frac{3}{2}$  et  $\frac{3}{2}; +\infty$ .

9. Dresser le tableau de variations de la fonction  $h$ .
10. Tracer la courbe  $\mathcal{C}_h$  de la fonction  $h$  dans un repère orthonormé.

## 2-3/ Variations des fonctions $f + \lambda$ et $\lambda f$

### Proposition

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$ , et  $\lambda$  un nombre réel non nul.

- Les fonctions  $f$  et  $f + \lambda$  ont le même sens de variation sur l'intervalle  $I$ .
- Si  $\lambda > 0$  alors les fonctions  $f$  et  $\lambda f$  ont le même sens de variation sur l'intervalle  $I$ .
- Si  $\lambda < 0$  alors les fonctions  $f$  et  $\lambda f$  ont des sens de variation opposés sur l'intervalle  $I$ .

### Applications

1. Étudier la monotonie de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  dans chacun des cas suivants :

- 1  $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$  et  $I = \mathbb{R}^+$
- 2  $f(x) = x^2 - 5$  et  $I = \mathbb{R}^-$
- 3  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  et  $I = ]0; +\infty[$
- 4  $f(x) = \frac{14x-10}{x}$  et  $I = ]-\infty; 0[$

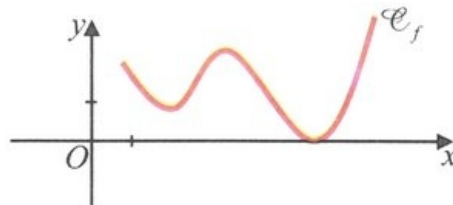
## III- Comparaison de deux fonctions numériques

### 3-1/ Fonction positive - fonction négative

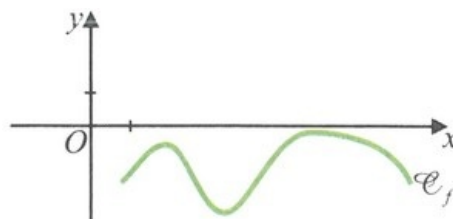
#### Définition

Soit  $f$  une fonction numérique d'ensemble de définition  $D_f$ .

- On dit que la fonction  $f$  est positive sur  $D_f$  si  $\forall x \in D_f \quad f(x) \geq 0$ , et on écrit :  $f \geq 0$



- On dit que la fonction  $f$  est négative sur  $D_f$  si  $\forall x \in D_f \quad f(x) \leq 0$ , et on écrit :  $f \leq 0$



## Applications

1. Étudier le signe de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1} f(x) = \frac{3x+2}{-2x^2+x+1}$$

$$\boxed{2} f(x) = \frac{x^2+x-6}{2x+1}$$

$$\boxed{3} f(x) = x^2 + x + 1 \sqrt{x+1} - 1$$

## 3-2/ Comparaison de deux fonctions numériques

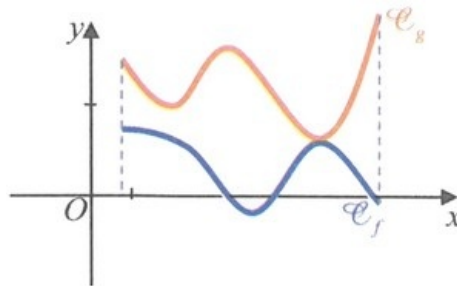
### Définition

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques définies sur un même ensemble  $D$ .

On dit que  $f$  est inférieure ou égale à  $g$  sur  $D$  (ou que  $g$  est supérieure ou égale à  $f$  sur  $D$ ) si :

$$(\forall x \in D) f(x) \leq g(x)$$

On écrit :  $f \leq g$  sur  $D$ .



## Applications

1. Comparer les fonctions  $f$  et  $g$  dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1} f(x) = x \text{ et } g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{2} f(x) = \frac{x}{x+1} \text{ et } g(x) = x^2$$

$$\boxed{3} f(x) = \frac{1+2x}{1+4x} \text{ et } g(x) = \frac{1-4x}{1-2x}$$

$$\boxed{4} f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \text{ et } g(x) = x + 2$$

## IV- Fonction majorée - fonction minorée - fonction bornée

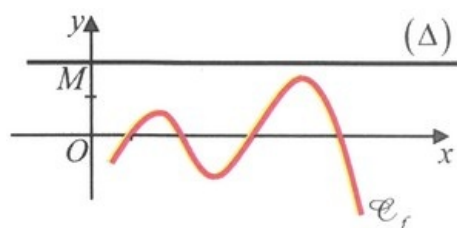
### Définition

Soit  $f$  une fonction numérique et  $D_f$  son ensemble de définition.

- On dit que la fonction  $f$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) \leq M$$

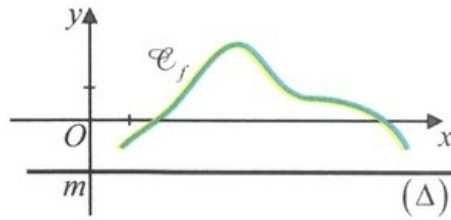
Le nombre  $M$  est dit un majorant de la fonction  $f$ .



- On dit que la fonction  $f$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) \geq m$$

Le nombre  $m$  est dit un minorant de la fonction  $f$ .



- On dit que la fonction  $f$  est bornée si elle à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire qu'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que :  $\forall x \in D_f \quad m \leq f(x) \leq M$

### Proposition

Soit  $f$  une fonction numérique et  $D_f$  son ensemble de définition.

Pour que la fonction  $f$  soit bornée, il faut et il suffit que :

$$(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+) \quad \forall x \in D_f \quad |f(x)| \leq \alpha$$

### Applications

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1) Montrer que la fonction  $f$  est majorée par  $\frac{7}{3}$ .

2) Montrer que la fonction  $f$  est minorée par 1.

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $g(x) = x + \frac{1}{x}$

3. Montrer que la fonction  $g$  est majorée par 2 sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

4. En déduire que la fonction  $g$  est minorée par  $-2$  sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

Soit  $u$  et  $v$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = \frac{x^4-x^2}{x^4+1}$  et

$$v(x) = 2 \cos x - 7 \sin(2x) + 3$$

5. Montrer que les fonctions  $u$  et  $v$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .

On considère la fonction numérique  $w$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $w(x) = x - \sqrt{x+1}$

6. Montrer par l'absurde que la fonction  $w$  n'est pas majorée sur  $\mathbb{R}^+$ .

## V- Extremums d'une fonction numérique

### Définition

Soit  $f$  une fonction numérique,  $D_f$  son ensemble de définition et  $x_0 \in D_f$ .

- On dit que  $f(x_0)$  est la valeur maximale absolue (ou le maximum absolu) de la fonction  $f$  si :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) \leq f(x_0)$$

- On dit que  $f(x_0)$  est une valeur maximale relative de la fonction  $f$  s'il existe un intervalle ouvert  $I$  centré en  $x_0$  et inclus dans  $D_f$  tel que :

$$(\forall x \in I) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

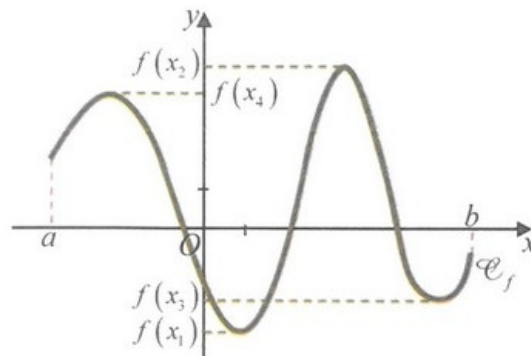
- On dit que  $f(x_0)$  est la valeur minimale absolue (ou le minimum absolu) de la fonction  $f$  si :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) \geq f(x_0)$$

- On dit que  $f(x_0)$  est une valeur minimale relative de la fonction / s'il existe un intervalle ouvert  $I$  centré en  $x_0$  et inclus dans  $D_f$  tel que :

$$(\forall x \in I) \quad f(x) \geq f(x_0)$$

- Les valeurs minimales et maximales de la fonction  $f$  sont appelées les extremums de  $f$ .



## Remarques

Ne jamais confondre minorant et minimum d'une fonction. Le minimum d'une fonction est un minorant qui admet un antécédent.

Autrement dit, le réel  $m$  est une valeur minimale de  $f$  sur  $I$  si, et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in I) \quad f(x) \geq m \\ (\exists x_0 \in I) \quad f(x_0) = m \end{cases}$$

Ne jamais confondre majorant et maximum d'une fonction. Le maximum d'une fonction est un majorant qui admet un antécédent.

Autrement dit, le réel  $M$  est une valeur maximale de  $f$  sur  $I$  si, et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in I) \quad f(x) \leq M \\ (\exists x_0 \in I) \quad f(x_0) = M \end{cases}$$

## Applications

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  et  $g(x) = -x^2 + 3x + 5$ .

1. Montrer que 2 est la valeur minimale absolue de la fonction  $f$ .
2. Montrer que  $\frac{29}{4}$  est la valeur maximale absolue de la fonction  $g$ .

On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $h(x) = |x| + \frac{1}{|x|}$ .

3. Montrer que  $h$  admet un minimum absolu au point 1.