Mathématiques : 1Bac SM

Séance 4-1-1 : Généralités sur les fonctions - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Ensemble de définition - parité d’une fonction

1-1/ Ensemble de définition d'une fonction numérique

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Une fonction f définie d'un ensemble A dans $\mathbb{R}$ est la donnée pour chaque élément de A d'un unique élément y de $\mathbb{R}$ appelé image de x.

On note alors $y = f(x)$.

L'ensemble A des nombres réels qui possèdent une image par f, est appelé ensemble de définition de la fonction numérique f.

Il est noté traditionnellement D_f.

Remarque

L’ensemble de définition d'une fonction f est la plus grande partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle on peut calculer la valeur de $f\left(x_0\right)$ en tout point x_0 de cette partie.

On a donc : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$

En pratique, on utilise souvent l’équivalence : $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}\ et\ f(x) \in \mathbb{R})$

Applications

1. Déterminer l’ensemble de définition de la fonction / dans chacun des cas suivants :

$\boxed{1}\ f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-1}$ $\boxed{2}\ f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-5x-6}}$ $\boxed{3}\ f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-5x-6}}$	$\boxed{4}\ f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{2\lvert x\rvert-1}$ $\boxed{5}\ f(x) = \frac{\tan x}{\cos x-1}$ $\boxed{6}\ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x+\sin x-2}$

1-2/ Parité d'une fonction numérique

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

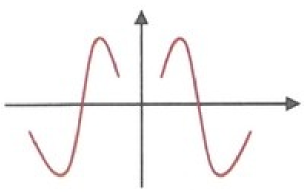
- On dit que la fonction f est paire si pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

- On dit que la fonction f est impaire si pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

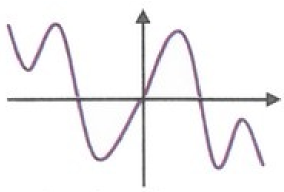
Proposition

Si f est une fonction paire, alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe $\mathscr{C}_f$.

Si f est une fonction impaire, alors l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe $\mathscr{C}_f$.



Graphe d’une fonction paire



Graphe d’une fonction impaire

Applications

1. Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$\boxed{1}\ f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ $\boxed{2}\ f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{4-x^2}}$ $\boxed{3}\ f(x) = x^3 - x^2 + 1$	$\boxed{4}\ f(x) = \frac{sinx}{2\cos x-1}$ $\boxed{5}\ f(x) = \frac{x^4}{x^3-1}$ $\boxed{6}\ f(x) = \frac{\lvert x\rvert}{x^4+1}$

II- Monotonie d'une fonction numérique

2-1/ Sens de variations d'une fonction (Rappels)

Définition

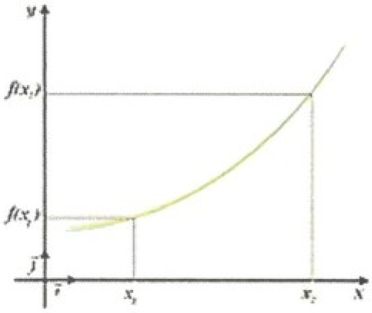
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I inclus dans son ensemble de définition.

On dit que la fonction f est croissante sur I si ;

$$\left(\forall\left(x_1;x_2\right)\in I^2\right)\ \left(x_1\leq x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)\leq f\left(x_2\right)\right)$$

On dit que la fonction f est strictement croissante sur I si :

$$\left(\forall\left(x_1;x_2\right)\in I^2\right)\ \left(x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)\right)$$

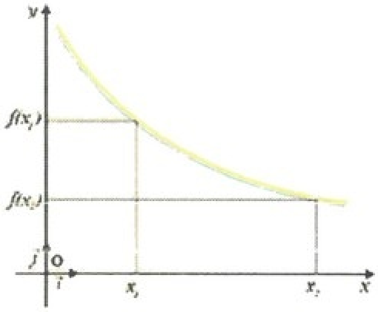


On dit que la fonction f est décroissante sur I si :

$$\left(\forall\left(x_1;x_2\right)\in I^2\right)\ \left(x_1\leq x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)\geq f\left(x_2\right)\right)$$

On dit que la fonction f est strictement décroissante sur I si :

$$\left(\forall\left(x_1;x_2\right)\in I^2\right)\ \left(x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)\right)$$



Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, et x_1 et x_2 deux éléments distincts de I.

Le nombre $T\left(x_1;x_2\right)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ est appelé taux de variation (ou d'accroissement) de la fonction f entre x_1 et x_2. De plus, on a les propriétés suivantes :

- f est croissante sur I si, et seulement si :
$\left(\forall\left(x_1;x_2\right)\in I^2\right)\ \left(x_1\neq x_2\Rightarrow T\left(x_1;x_2\right)\geq 0\right)$

- f est strictement croissante sur I si, et seulement si :
$\left(\forall\left(x_1;x_2\right)\in I^2\right)\ \left(x_1\neq x_2\Rightarrow T\left(x_1;x_2\right)>0\right)$

- f est décroissante sur I si, et seulement si :
$\left(\forall\left(x_1;x_2\right)\in I^2\right)\ \left(x_1\neq x_2\Rightarrow T\left(x_1;x_2\right)\leq 0\right)$

- f est strictement décroissante sur I si, et seulement si :
$\left(\forall\left(x_1;x_2\right)\in I^2\right)\ \left(x_1\neq x_2\Rightarrow T\left(x_1;x_2\right)<0\right)$

Applications

1. Étudier les variations de la fonction numérique f sur les intervalles I et J dans les deux cas suivants :

$$\boxed{1}\ f\left(x\right)=\frac{2x-3}{x+1}\ ;\ I=\left]-1;+\infty\right[\ ;\ J=\left]-\infty;-1\right[$$
$$\boxed{2}\ f\left(x\right)=\sqrt{x^2-4x+3}\ ;\ I=\left]-\infty;1\right]\ ;\ J=\left[3;+\infty\right[$$

2-2/ Monotonie et parité

Proposition

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que pour tout $x\in D_f$: $-x\in D_f$) .

Pour tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R}^+\cap D_f$, on pose : $I' = \left\{-x/x\in I\right\}$

Alors :

- Si la fonction f est paire, alors les sens de monotonie sur I et I' sont opposés.

- Si la fonction f est impaire, alors les sens de monotonie sur I et I' sont identiques.

Applications

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f\left(x\right)=x+\frac{2}{x}$

1. Étudier la parité de!a fonction f.
2. Étudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $\left]0;\sqrt{2}\right]$ et $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.
3. En déduire la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $\left[-\sqrt{2};0\right[$ et $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$.

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g\left(x\right)=\frac{|x|}{x^2+|x|+1}$

4. Étudier la parité de la fonction g.
5. Étudier la monotonie de la fonction g sur $\mathbb{R}^+$.
6. En déduire la monotonie de la fonction g sur $\mathbb{R}^-$, puis dresser son tableau de variations.

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h\left(x\right)=x+|2x-3|-|2x+3|$

7. Montrer que la fonction h est impaire.
8. Étudier la monotonie de la fonction h sur chacun des intervalles $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ et $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.
9. Dresser le tableau de variations de la fonction h.

10. Tracer la courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h dans un repère orthonormé.

2-3/ Variations des fonctions $f+\lambda$ et λf

Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, et λ un nombre réel non nul.

- Les fonctions f et $f+\lambda$ ont le même sens de variation sur l'intervalle I.

- Si $\lambda>0$ alors les fonctions f et λf ont le même sens de variation sur l'intervalle I.

- Si $\lambda<0$ alors les fonctions f et λf ont des sens de variation opposés sur l'intervalle I.

Applications

1. Étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ f\left(x\right)=2\sqrt{x}-3\ et\ I=\mathbb{R}^{+}$$
$$\boxed{2}\ f\left(x\right)=x^{2}-5\ et\ I=\mathbb{R}^{-}$$
$$\boxed{3}\ f\left(x\right)=\frac{x+1}{x}\ et\ I=\left]0;+\infty\right[$$
$$\boxed{4}\ f\left(x\right)=\frac{14x-10}{x}\ et\ I=\left]-\infty;0\right[$$

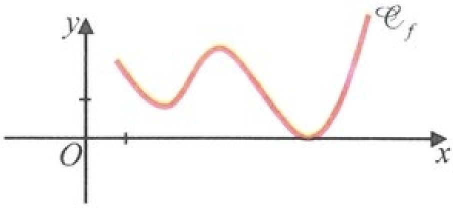
III- Comparaison de deux fonctions numériques

3-1/ Fonction positive - fonction négative

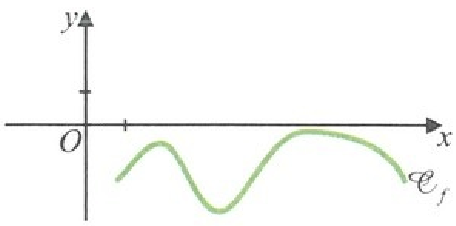
Définition

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f.

- On dit que la fonction f est positive sur D_f si $\left(\forall x\in D_f\right)\ f\left(x\right)\geq 0$, et on écrit : $f\geq 0$



- On dit que la fonction f est négative sur D_f si $\left(\forall x\in D_f\right)\ f\left(x\right)\leq 0$, et on écrit : $f\leq 0$



Applications

1. Étudier le signe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ f(x)=\frac{3x+2}{-2x^2+x+1}$$
$$\boxed{2}\ f(x)=\frac{x^2+x-6}{2x+1}$$
$$\boxed{3}\ f(x)=\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)$$

3-2/ Comparaison de deux fonctions numériques

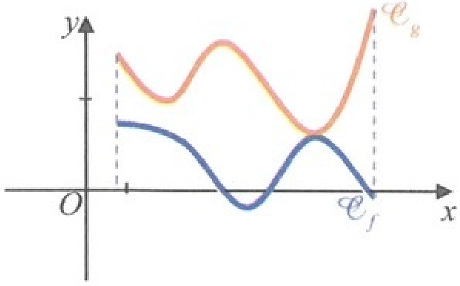
Définition

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un même ensemble D.

On dit que f est inférieure ou égale à g sur D (ou que g est supérieure ou égale à f sur D) si :

$$(\forall x\in D)\ f(x)\leq g(x)$$

On écrit : $f\leq g$ sur D.



Applications

1. Comparer les fonctions f et g dans chacun des cas suivants :

$$\boxed{1}\ f(x)=x\ et\ g(x)=\frac{1}{x}$$
$$\boxed{2}\ f(x)=\frac{x}{x+1}\ et\ g(x)=x^2$$
$$\boxed{3}\ f(x)=\frac{1+2x}{1+4x}\ et\ g(x)=\frac{1-4x}{1-2x}$$
$$\boxed{4}\ f(x)=\sqrt{x^2+4}\ et\ g(x)=x+2$$

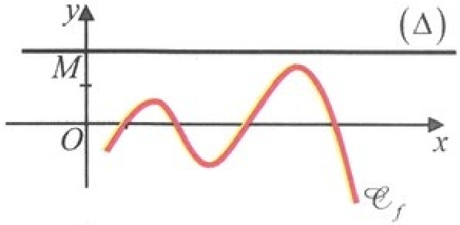
IV- Fonction majorée - fonction minorée - fonction bornée

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

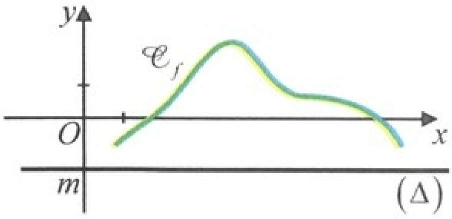
- On dit que la fonction f est majorée s'il existe un réel M tel que :
$\left(\forall x\in D_f\right)\ f(x)\leq M$

Le nombre M est dit un majorant de la fonction f.



- On dit que la fonction f est minorée s’il existe un réel m tel que :
$\left(\forall x\in D_f\right)\ f(x)\geq m$

Le nombre m est dit un minorant de la fonction f.



- On dit que la fonction f est bornée si elle à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire qu'il existe deux réels m et M tels que : $\left(\forall x \in D_f\right)\ m \leq f(x) \leq M$

Proposition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

Pour que la fonction f soit bornée, il faut et il suffit que :

$$(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+)\ \left(\forall x \in D_f\right)\ |f(x)| \leq \alpha$$

Applications

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1)Montrer que la fonction f est majorée par $\frac{7}{3}$.

2)Montrer que la fonction f est minorée par 1.

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = x + \frac{1}{x}$

3. Montrer que la fonction g est majorée par 2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire que la fonction g est minorée par -2 sur $\mathbb{R}_-^*$.

Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \frac{x^4-x^2}{x^4+1}$ et
$v(x) = 2\cos x - 7\sin(2x) + 3$

5. Montrer que les fonctions u et v sont bornées sur $\mathbb{R}$.

On considère la fonction numérique w définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $w(x) = x - \sqrt{x+1}$

6. Montrer par l'absurde que la fonction w n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^+$.

V- Extremums d'une fonction numérique

Définition

Soit f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et $x_0 \in D_f$.

- On dit que $f(x_0)$ est la valeur maximale absolue (ou le maximum absolu) de la fonction f si :

$$\left(\forall x \in D_f\right)\ f(x) \leq f(x_0)$$

- On dit que $f(x_0)$ est une valeur maximale relative de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert I centré en x_0 et inclus dans D_f tel que :

$$(\forall x \in I)\ f(x) \leq f(x_0)$$

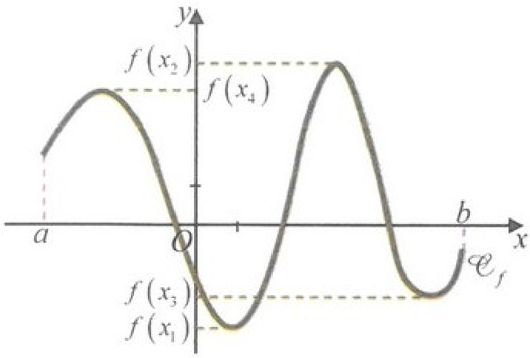
- On dit que $f(x_0)$ est la valeur minimale absolue (ou le minimum absolu) de la fonction f si :

$$\left(\forall x \in D_f\right)\ f(x) \geq f(x_0)$$

- On dit que $f\left(x_0\right)$ est une valeur minimale relative de la fonction / s'il existe un intervalle ouvert I centré en x_0 et inclus dans D_f tel que :

$$(\forall x \in I)\ f(x) \geq f\left(x_0\right)$$

- Les valeurs minimales et maximales de la fonction f sont appelées les extremums de f.



Remarques

Ne jamais confondre minorant et minimum d'une fonction. Le minimum d'une fonction est un minorant qui admet un antécédent.

Autrement dit, le réel m est une valeur minimale de f sur I si, et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in I)\ f(x) \geq m \\ (\exists x_0 \in I)\ f\left(x_0\right) = m \end{cases}$$

Ne jamais confondre majorant et maximum d’une fonction. Le maximum d'une fonction est un majorant qui admet un antécédent.

Autrement dit, le réel M est une valeur maximale de f sur I si, et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in I)\ f(x) \leq M \\ (\exists x_0 \in I)\ f\left(x_0\right) = M \end{cases}$$

Applications

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 3$ et $g(x) = -x^2 + 3x + 5$.

1. Montrer que 2 est la valeur minimale absolue de la fonction f.
2. Montrer que $\frac{29}{4}$ est la valeur maximale absolue de la fonction g.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = |x| + \frac{1}{|x|}$.

3. Montrer que h admet un minimum absolu au point 1.