

Sommaire**I- Généralités sur les ensembles**

1-1/ Notion d'ensemble - élément d'un ensemble

1-2/ Définition d'un ensemble

1-3/ Égalité de deux ensembles

II- Parties d'un ensemble - Inclusion - Complémentaire

2-1/ Inclusion

2-2/ Complémentaire

2-3/ Ensemble des parties d'un ensemble

III- Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

3-1/ Intersection

3-2/ Réunion

3-3/ Règles de calcul

3-4/ Différence de deux ensembles

3-5/ Produit cartésien

I- Généralités sur les ensembles**1-1/ Notion d'ensemble - élément d'un ensemble****Définition**

Un ensemble E est une collection d'objets satisfaisant un certain nombre de propriétés et chacun de ces objets est appelé élément de cet ensemble.

Si x est un élément de l'ensemble E , on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.

Si x n'appartient pas à E , on note $x \notin E$.

1-2/ Définition d'un ensemble

Il y a deux manières de définir un ensemble E :

- En extension :

On énumère tous les éléments de E , c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments, s'il possède un nombre fini d'éléments (pas trop grand).

Dans ce cas, l'ordre dans lequel on donne les éléments n'a aucune importance.

- En compréhension :

On décrit l'ensemble E en donnant une propriété qui caractérise ses éléments.

Si $P(x)$ est la propriété qui caractérise les éléments de E , alors on écrit : $E = \{x / P(x)\}$

Applications

1. Écrire en extension les ensembles suivants :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0 \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{N} / x^2 \leq 51 \text{ et } \sqrt{x-1} \in \mathbb{N} \right\}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{Z} / x^2 + (x+1)^2 + (x^2 - 2)^2 = 0 \right\}$$

$$E = \left\{ n \in \mathbb{N} / n^3 < 200 \right\}$$

$$F = \left\{ n \in \mathbb{N} / |3n - 14| \leq 10 \right\}$$

2. Écrire en compréhension les ensembles suivants :

$$G = \{3; 6; 9; 12; 15\}$$

$$H = \{1; 3; 9; 27; 81; \dots\}$$

$$J = \{\dots; -8; -3; 2; 7; 12; \dots\}$$

$$K = \left\{ 1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots \right\}$$

$$L = \left\{ \dots; \frac{1}{9}; \frac{1}{3}; 1; 3; 9; \dots \right\}$$

1-3/ Égalité de deux ensembles

Définition

Soit E et F deux ensembles.

On dit que E et F sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments, et on écrit $E = F$.

Applications

On considère l'ensemble : $E = \left\{ x \in \mathbb{R} / -\frac{1}{4} < \frac{x}{x^2+4} < \frac{1}{4} \right\}$

1. Montrer que : $E = \mathbb{R}$

On considère les deux ensembles $A =]-\infty; -1[$ et $B = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x}{x+1} > 1 \right\}$.

2. Montrer que : $A = B$

II- Parties d'un ensemble - Inclusion - Complémentaire

2-1/ Inclusion

Définition

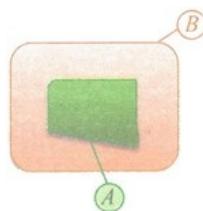
Soit A et B deux parties d'un ensemble E .

On dit que A est incluse dans B si chaque élément de A est un élément de B .

On note $A \subset B$.

On dit aussi que la partie A est contenue dans B ou que A est un sous-ensemble de B .

En d'autres termes : $A \subset B \Leftrightarrow [(\forall x \in E); x \in A \Rightarrow x \in B]$



Remarques

Soit A et B deux parties d'un ensemble E .

Dire que A n'est pas inclue dans B signifie qu'il existe au moins un élément $x \in A$ tel que $x \notin B$, et on écrit $A \subseteq B$.

Pour tout ensemble A , on a toujours $\emptyset \subset A$ et $A \subset A$.

Proposition

Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E .

Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

$A = B$ si, et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Remarques

- L'écriture $A \neq B$ signifie que les ensembles A et B sont distincts.
- $A = B \Leftrightarrow [(\forall x \in E); x \in A \Leftrightarrow x \in B]$
- Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors on peut écrire $A \subset B \subset C$. Par exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

2-2/ Complémentaire

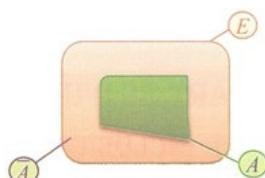
Définition

Soit A une partie d'un ensemble E .

L'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à l'ensemble A est appelé le complémentaire de A dans E .

On le note C_E^A ou \overline{A} .

On a alors : $C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$ et $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$



Applications

On considère l'ensemble : $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 4x > 0\}$

1. Décrire en extension l'ensemble $C_{\mathbb{N}}^A$.

On considère l'ensemble suivant : $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x < 5\}$

2. Montrer que : $[2; +\infty[\subset C_{\mathbb{R}}^B$

On considère l'ensemble : $E = \{x \in \mathbb{R} / x^4 + x^3 + x^2 + x = 2\}$

3. Montrer que : $[1; +\infty[\subset C_{\mathbb{R}}^E$

Proposition

Soit A et B deux parties d'un ensemble E .

Alors :

- $C_E^E = \emptyset$ et $C_E^{\emptyset} = E$ et $C_E^{\overline{A}} = A$

- $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

2-3/ Ensemble des parties d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble.

On appelle ensemble des parties de E , et on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des sous-ensembles de E .

En d'autres termes : $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$

Remarques

Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des ensembles. En particulier, on a $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$. Si E est un ensemble non vide, alors : $a \in E \Leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(E)$

III- Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

3-1/ Intersection

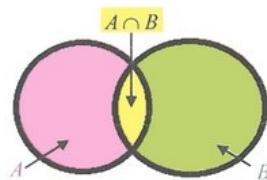
Définition

Soit A et B deux parties d'un ensemble E .

L'intersection des ensembles A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et dans B .

En d'autres termes : $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$

On a alors : $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$



Proposition

Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E .

On a alors les propriétés suivantes :

- | | |
|---|---|
| [1] $A \cap B = B \cap A$ | [4] $A \cap B \subset A \text{ et } A \cap B \subset B$ |
| [2] $A \cap E = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$ | [5] $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| [3] $A \cap A = A$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$ | [6] $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ |

3-2/ Réunion

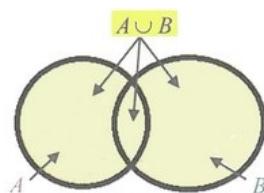
Définition

Soit A et B deux parties d'un ensemble E .

La réunion des ensembles A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B .

En d'autres termes : $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$

On a alors : $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$



Proposition

Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E .

On a alors les propriétés suivantes :

- | | |
|---|---|
| [1] $A \cup B = B \cup A$ | [4] $A \subset A \cup B \text{ et } B \subset A \cup B$ |
| [2] $A \cup E = E$ et $A \cup \emptyset = A$ | [5] $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ |
| [3] $A \cup A = A$ et $A \cup \overline{A} = E$ | [6] $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$ |

3-3/ Règles de calcul

Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E .

On a alors les propriétés suivantes :

Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E .

Alors : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Ces deux égalités sont appelées « Lois de Morgan ».

Applications

On considère les deux ensembles A et B définis par :

$$A = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } B = \left\{ -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. Montrer que : $A \cap B = \emptyset$
2. Déterminer l'ensemble $(A \cup B) \cap [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E .

3. Montrer que $A \cap (B \cup (A \cap C)) = A \cap (B \cup C)$ et $A \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$.
4. Montrer que : $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$
5. Simplifier $A \cap (\overline{B \cap C})$ et $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A \cap \overline{C}})$.

3-4/ Différence de deux ensembles

Définition

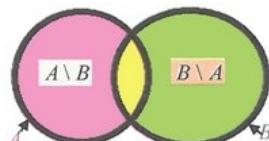
Soit A et B deux parties d'un ensemble E .

La différence des ensembles A et B dans cet ordre, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B .

En d'autres termes : $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$

On a alors : $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

$A \setminus B$ se lit « A moins B » ou « A privé de B »



Proposition

Soit A et B deux parties d'un ensemble E .

On a alors les propriétés suivantes :

- [1] $A \setminus B = A \cap C_E^B = A \cap \overline{B}$
- [2] $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

Applications

1. Déterminer les ensembles A et B sachant que :

$$A \cup B = \{1; 2; 3; \dots; 11\} \text{ et } A \cap B = \{4; 5; 6; 11\} \text{ et } A \setminus B = \{7; 8; 9; 10\}$$

Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E .

2. Montrer que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ et $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

3. Montrer que si $A \cap B = A \cap C$ et $B \setminus A = C \setminus A$, alors $B = C$.

Soit A, B, C et D quatre parties d'un ensemble E .

4. Montrer que : $[(B \setminus C) \subset A \text{ et } (C \setminus D) \subset A] \Rightarrow (B \setminus A) \subset A$

Soit A et B deux parties d'un ensemble E .

On pose : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

L'ensemble $A \Delta B$ s'appelle la différence symétrique des ensembles A et B .

5. On suppose dans cette question que $A = \{1; 2; 3; 5; 6\}$ et $B = \{2; 3; 7; 8; 9\}$, déterminer $A \Delta B$ puis construire un diagramme de Venn pour schématiser cet ensemble.

6. Montrer que pour tous A et B de $\mathcal{P}(E)$, on a :

$$\begin{aligned} A \Delta A &= \emptyset ; \quad A \Delta E = \overline{A} ; \quad A \Delta \emptyset = A \\ A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) ; \quad A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B} \end{aligned}$$

7. Montrer que pour tous A et B de $\mathcal{P}(E)$, on a les deux équivalences suivantes :

$$A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B \text{ et } A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow (A = \emptyset \text{ et } B = \emptyset)$$

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E .

8. Établir les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A \cap (B \Delta C) &= (A \cap B) \Delta (A \cap C) \\ A \Delta (B \Delta C) &= (A \Delta B) \Delta C \end{aligned}$$

3-5/ Produit cartésien

Définition

Soit E et F deux ensembles.

Le produit cartésien des ensembles E et F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.

En d'autres termes : $(x; y) \in E \times F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F)$

On a alors : $E \times F = \{(x; y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$

Remarques

Si $E = F$, le produit cartésien $E \times E$ est noté E^2 et appelé le carré cartésien de E .

Soit E et F deux ensembles. Alors : $E \times F = \emptyset \Leftrightarrow (E = \emptyset \text{ et } F = \emptyset)$

Applications

On considère les deux ensembles :

$$A = \{n \in \mathbb{N} / n^2 < 16\} \text{ et } B = \{n \in \mathbb{N} / |n - 2| \leq 1\}$$

1. Écrire en extension l'ensemble $A \times B$, puis représenter un diagramme cartésien de cet ensemble.

2. En utilisant le raisonnement par contre-exemple, justifier que :

$$(E \times F) \cup (G \times H) \neq (E \cup G) \times (F \cup H)$$

3. Représenter dans un repère orthonormé les ensembles suivants :

$$[-1; 1] \times [0; 2] \text{ et } [0; +\infty[\times [0; 2[$$

4. Déterminer les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(E \times F)$ avec $E = \{2; 1\}$ et $F = \{0\}$.