Mathématiques : 1Bac SM

Séance 1-2-1 : Notion de logique - Partie 2 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

V- Lois logiques et raisonnements

5-1/ Loi logique ou tautologie

Définition

Soit $Q_1, Q_2, \ldots., Q_n$ des propositions.

On appelle loi logique ou tautologie toute proposition P résultante de l'assemblage par des connecteurs logiques de propositions prises parmi $Q_1, Q_2, \ldots., Q_n$ qui est vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions en jeu.

Applications

Soit P et Q deux propositions.

1. Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$$
$$P \Rightarrow \left(\overline{P} \Rightarrow Q\right)$$
$$\left(\overline{Q} \text{ ou } P\right) \text{ ou } \left(Q \text{ ou } \overline{P}\right)$$
$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \left[(P \text{ et } Q) \text{ ou } \left(\overline{P} \text{ et } \overline{Q}\right)\right]$$

5-2/ Lois de Morgan

Proposition

Soit P et Q deux propositions.

Les deux propositions suivantes sont des lois logiques :

$$\overline{(P\ et\ Q)} \Leftrightarrow \left(\overline{P}\ ou\ \overline{Q}\ \right)$$
$$\overline{(P\ ou\ Q)} \Leftrightarrow \left(\overline{P}\ \ et\ \overline{Q}\ \right)$$

Applications

Soit P et Q deux propositions.

1. Déterminer la négation des propositions suivantes :

$$P\ :\ \text{« } (\exists x \in \mathbb{R})\ 0 \leq x < 1 \text{ »}$$
$$Q\ :\ \text{« } (\forall x \in \mathbb{R})\ \left(x^2 = 1 \Rightarrow x = 1\right) \text{ »}$$
$$R\ :\ \text{« } (\forall a \in \mathbb{R})\ \left(|a+1| \leq 2 \Rightarrow a \geq -3\right)\text{»}$$
$$S\ :\ \text{« } (\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\ \left(x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow -y \leq x \leq y\right) \text{ »}$$

5-3/ Raisonnement par contraposée

Proposition

Soit P et Q deux propositions.

L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la contraposée (ou l'implication contraposée) de l'implication $P \Rightarrow Q$.

La contraposée d'une implication est équivalente à celle-ci :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$$

Remarques

Il faut bien distinguer entre la négation, la contraposée et la réciproque :

- La négation de $P \Rightarrow Q$ est $\left(P\ et\ \overline{Q}\right)$.
- La réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$.
- La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Le recours au raisonnement par contraposée n'est évidemment pertinent que si cette contraposée est plus facile à prouver que l'implication directe.

Applications

1. En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer les implications suivantes :

$$\boxed{1}\ (\forall x \in [-1;+\infty[)\ \left(x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \neq 1 + \tfrac{x}{2}\right)$$
$$\boxed{2}\ (\forall x \in \mathbb{R})\ \left(x^2 \neq 3 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \neq 1\right)$$
$$\boxed{3}\ \left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right)\ \left(4y \neq -3x \Rightarrow x - y \neq 7(x+y)\right)$$
$$\boxed{4}\ \left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right)\ \left((xy-1)(x-y) \neq 0 \Rightarrow x\left(y^2+y+1\right) \neq y\left(x^2+x+1\right)\right)$$
$$\boxed{5}\ \left(\forall (x;y) \in (]1;+\infty[)^2\right)\ \left(x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y\right)$$
$$\boxed{6}\ (\forall x \in \mathbb{R})\ \left(x \notin [-1;4] \Rightarrow x^2 - 3x - 4 > 0\right)$$

$$\boxed{7}\ (\forall x\in\mathbb{R}^{+})\ \left(x\neq 0\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}}\neq 1-\sqrt{x}\right)$$

$$\boxed{8}\ \left(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^{2}\right)\ \left(x^2+y^2\leq 1\Rightarrow |x+y|\leq 2\right)$$

$$\boxed{9}\ \left(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^{2}\right)\ \left(\left|2x^2+5xy+3y^2\right|\leq 3\Rightarrow \left(|x+y|\leq 3\ ou\ \ |2x+3y|\leq\sqrt{3}\right)\right)$$

$$\boxed{10}\ \left(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^{2}\right)\ \left(x^2+xy+y^2\leq 3\Rightarrow \left(|x+2y|\leq 2\sqrt{3}\ et\ \ |x|\leq 2\right)\right)$$

5-4/ Raisonnement par l'absurde

Proposition

Soit P et Q deux propositions.

La proposition suivante est une loi logique :

$$\left[\left(\overline{P}\Rightarrow Q\right)\ et\ \left(\overline{P}\Rightarrow\ \overline{Q}\ \right)\right]\Rightarrow P$$

Applications

Soit a, b et c des réels positifs tels que $ab<c$.

1. Montrer que : $a<\sqrt{c}\ ou\ b<\sqrt{c}$

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x;y)\in\left(\mathbb{R}^{*}\right)^{2}\ :\ f(xy)=f(x)f(y)$

On suppose que $f(1)\neq 0$.

2. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*})\ f(x)\neq 0$
3. Montrer par l'absurde que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \sqrt{4n+2}\notin\mathbb{N}$

5-5/ Raisonnement par disjonction des cas

Proposition

Soit P et Q deux propositions.

La proposition suivante est une loi logique :

$$\left[(P\Rightarrow R)\ et\ \ (Q\Rightarrow R)\right]\Leftrightarrow\left[((P\ ou\ Q)\Rightarrow R)\right]$$

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1)\ \left|x^2-4\right|-x^2>0$$
$$(I_2)\ |2x-1|+|2x+1|+|x|\geq 4$$
$$(I_3)\ \sqrt{3-x}+x<0$$

2. Montrer que le produit de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 6.
3. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\left.a\right)\ x+\sqrt{x^2+1}>0$$
$$b)\ \ |x|+|x+1|+|x-1|\neq 0$$
$$\left.c\right)\ \ |x-1|\leq x^2-2x+2$$

Soit a, b et c trois réels tels que c est positif.

4. En utilisant un raisonnement par disjonction des cas, montrer les deux implications suivantes :

$$(|a| \leq c \; et \; |b| \leq c) \Rightarrow |a+b| + |a-b| \leq 2c$$
$$|a+b| + |a-2b| \leq 3c \Rightarrow (|a| \leq 2c \; et \; |b| \leq c)$$

Soit n un entier naturel.

5. Démontrer que si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n = 4k+1$ ou $n = Ak+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.
6. Déduire que si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

5-6/ Raisonnement par récurrence

Proposition

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle qui dépend d'un entier naturel n et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si la proposition $P(n_0)$ est vraie et si l'implication «$P\big(n\big) \Rightarrow P\{n+1\big)$» est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors, la proposition $P(n)$ est vraie, pour tout entier $n \geq n_0$.

Applications

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1+2+\ldots.+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^3+2^3+\ldots.+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$1\times 2+2\times 3+\ldots+n\,(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ est divisible par 23.

Soit a et b deux réels distincts et strictement positifs.

3. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$