AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 2 Devoir 3 Modèle 2

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \bullet)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $M(a;b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble : $V = \{M(a;b) / (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$

On note $I = M(1;0)$ et $J = M(0;1)$.

1. Montrer que $(V; +; \bullet)$ est un espace vectoriel réel.
2. Montrer que $(I; J)$ est une base de V, puis déterminer les coordonnées d'un élément $M \in V$ dans cette base.
3. Calculer J^2.
4. Montrer que $(V; +; \times)$ est un anneau.
5. L'anneau $(V; +; \times)$ est-il commutatif ?
6. L'anneau $(V; +; \times)$ est-il intègre ?
7. Déterminer les éléments inversibles dans $(V; +; \times)$.

Soit $M \in V$.

On pose $M^1 = M$ et $M^{n+1} = M^n \times M$ pour tout $n \in \mathbb{N}* - \{1\}$.

8. Montrer que le système de coordonnées de M^n dans la base $(I; J)$ sont $(a^n; na^{n-1}b)$.
9. Déterminer le couples des coordonnées de la matrice $M + M^2 + \ldots + M^n$ dans la base $(I; J)$ en fonction de a, b et n.

II- Exercice 2

1. Résoudre l'équation : (E) : $y'' - 2y' + 5y = 0$
2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions $f(0) = f'(0) = 1$.
3. En déduire que $\int_0^\pi e^x \cos(2x) \, \mathrm{d}x = \frac{e^\pi - 1}{5}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

4. Résoudre et discuter selon les valeurs de θ l'équation différentielle suivante : $y'' - (2\sin\theta)y' + y = 0$

III- Exercice 3

Partie 1

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

On tire successivement et avec remise 4 boules de l’urne et on considère la variable aléatoire X égale au nombre de boules noires tirées de l'urne.

1. Préciser la loi de la variable aléatoire X.
2. Calculer l’espérance mathématique de X.

Partie 2

On effectue l’expérience aléatoire suivante sur trois étapes comme suit :

- Étape 1 : On rire une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet dans l’urne.
- Étape 2 : On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur de celle de la lère boule tirée.
- Étape 3 : On tire successivement et sans remise 3 boules de l’urne parmi les 12 boules.

On considère les événements suivants :

- N : « La lère boule tirée de l'urne est noire »
- R : « La lère boule tirée de l'urne est rouge »
- E : « Les boules tirées dans la 3ème étapes sont toutes noires ».

1. Montrer que $P\left(E\cap N\right)=\frac{12}{55}$.
2. Calculer $P\left(E\right)$.
3. Calculer la probabilité de l'événement R sachant l'événement E est réalisé.