AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 2 Devoir 2 Modèle 2

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1

soit n un élément de $\mathbb{N}$.

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(x-2n)(y-2n)=2n^2$

On pose : $\delta=(x-2n)\wedge(y-2n)$

1. Montrer que $\delta^2|2n^2$ et $\delta|\,(x\wedge y)$.
2. Montrer que $x^2+y^2=(x+y-2n)^2$, puis déduire que $(x\wedge y)|\delta$.
3. Montrer que $(x\wedge y)|n$.

II- Exercice 2

Soit $J=]0;1[$.

On considère dans J la loi $*$ telle que : $\left(\forall (x,y)\in J^2\right)\ x*y=\frac{xy}{xy+(x-1)(y-1)}$

1. Montrer que $*$ est interne dans J et commutative.
2. Montrer que $*$ est associative.
3. Montrer que $(J,*)$ est un groupe commutatif.

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^{*+}$ vers J par : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})\ f(x)=\frac{x}{x+1}$

4. Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ vers $(J,*)$.
5. Déduire la structure de $(J,*)$.

III- Exercice 3

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau de zéro $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif.

Pour tous a et b de $\mathbb{R}$, on pose : $M(a;b)=\begin{pmatrix}a&a-b\\b&a+b\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble : $E=\left\{M(a;b)/\,(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1. Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$.
2. Calculer $J^2=J\times J$ où $J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, puis en déduire que E n'est pas une partie stable de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

On définit sur l'ensemble $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ une loi de composition interne $*$ par
$A * B = A \times N \times B$ avec $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et qui, à chaque nombre complexe non nul $a + ib$ (a et b deux réels), la matrice $M(a;b)$.

3. Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*; \times)$ dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

On pose $E^* = E - \{O\}$.

4. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.
5. Montrer que $(E^*; *)$ est un groupe commutatif.
6. Montrer que pour tout $(A; B; C) \in E^3 \;:\; A * (B + C) = A * B + A * C$.
7. En déduire de ce qui précède que $(E; +; *)$ est un corps commutatif.