

I- Exercice 1

Partie 1

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} \ln^2(x)$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter les résultats.
2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Montrer que f admet deux points d'inflexion.
4. Représenter (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ avec $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ (on prend $e^2 \cong 7,4$ et $\frac{4}{e^2} \cong 0,6$).
5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (\mathcal{C}_f) , $\left(O; \vec{i}\right)$, les droites d'équation $x = 1$ et $x = e^2$.

Partie 2

$(\forall p \in \mathbb{N}^*)$, on pose $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2} \, dx$.

1. Calculer I_1 .
2. Montrer que $(\forall p \in \mathbb{N}^*) I_{p+1} = \frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$.
3. En déduire I_2 , I_3 et I_4 .
4. Interpréter géométriquement $\pi \cdot I_4$.

Partie 3

On pose $F(x) = \int_{\ln x}^{1+\ln x} f(t) \, dt$.

1. Montrer que F est définie sur $I =]1; +\infty[$.
2. Montrer que $(\forall x \in I) (\exists \beta \in [\ln x : \ln x + 1]) / F(x) = f(\beta)$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

$(\forall \alpha \in]0; 1[)$, on pose $A(x) = \int_{\alpha}^1 f(t) \, dt$.

3. Calculer $A(x)$ en fonction de α , puis calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$.
4. Montrer que F est dérivable sur I , puis calculer $F'(x)$.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $u_n = \int_1^{\frac{1}{n}+1} f(nt) dt$

5. Montrer que $u_n = \frac{1}{n} \cdot \int_1^{1+n} f(t) dt$.

6. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

II- Exercice 2

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère l'application $F : P \rightarrow P$, qui laisse invariant $\Omega(i)$ et qui associe à chaque point $M(Z)$ de $P - \{\Omega\}$ le point $M'(Z')$ tel que $\Omega M M'$ est un triangle rectangle en M et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

1. Déterminer l'écriture complexe de F .
2. Montrer que Ω est le seul point invariant par F .

Soit $R(\Omega, \frac{\pi}{3})$ la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3. Montrer que $F = R \circ h$ avec h une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

Soit H la projection orthogonale de M sur $(\Omega M')$, et on pose : $F(H) = M''$

4. Montrer que Ω, M, M' et M'' sont cocycliques.

III- Exercice 3

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que m^2 et $m - 1$ sont premiers entre eux.
2. En déduire que l'équation (E) : $m^2x + (m - 1)y = 1$ admet au moins une solution.
3. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) .

On pose $m = 7$.

4. Montrer que $4 \circ 1$ est un nombre premier.
5. En déduire que $2011^{49^2} \equiv 2011 [401]$.

IV- Exercice 4

On pose E l'ensemble de couples (a, b) tel que $a \neq -1$, et on considère l'application $f_{(a,b)}$ définie par :

$$f_{(a,b)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$Z = x + iy \rightarrow Z' = x' + iy' / \begin{cases} x' = (1 + a)x + x \\ y' = y + b \end{cases}$$

1. Vérifier que $(\forall (a, b) \in E) (\forall (a', b') \in E) f_{(a',b')} \circ f_{(a,b)} = f_{(a+a'+aa', b+b')}$,
2. Montrer que \circ est une loi de composition interne dans l'ensemble

$$A = \{f_{(a,b)} / (a, b) \in E\}.$$

3. Montrer que $(\forall (a, b) \in E) f^{-1}_{(a,b)} = f_{\left(\frac{-a}{1+a}, -b\right)}$.

4. Montrer que (A, \circ) est un groupe commutatif.

On définit sur E la loi de composition interne " T " par

$$(\forall (a, b) \in E) (\forall (a', b') \in E) (a, b)T(a', b') = (a + a' + aa', b + b').$$

On considère l'application : $h : A \rightarrow E$

$$f_{(a,b)} \rightarrow (a, b)$$

5. Montrer que h est un isomorphisme de (A, \circ) vers (E, T) .

6. En déduire la structure que (E, T) .

7. Déterminer l'élément neutre de (E, T) , et le symétrique d'un élément (a, b) de (E, T) .

On pose : $H = \{(x, \ln x + 1) / x > -1\}$

8. Montrer que (H, T) est un groupe commutatif.