AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 1 Devoir 2 Modèle 2

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1 (7 pts)

Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme : $P_n\left(X\right) = X^n + X^{n-1} + \ldots + X - 1$

1. Démontrer que P_n possède une seule racine dans $\mathbb{R}^+$, que l'on note u_n.
2. Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
3. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{1}{2}$.

Soit $\rho \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.

4. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n\left(\rho\right) > 0$.
5. Démontrer que $\left(u_n\right)$ converge vers $\frac{1}{2}$.

II- Exercice 2 (13 pts)

Partie 1

soit g la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par : $g\left(x\right) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

1. Calculer les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} g\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g\left(x\right)$.
2. Montrer que $g'\left(x\right) = -\frac{-1}{x(x+1)^2}$, et donner le tableau de variation de g.
3. Déduire que $\left(\forall x > 0\right)\ \ g\left(x\right) > 0$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f\left(x\right) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f\left(0\right) = 0$.

1. Montrer que f est continue à droite de 0.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, et donner une interprétation géométrique du résultat.
3. Étudier la branche infinie de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au voisinage de $+\infty$.
4. Calculer $f'\left(x\right)$ et étudier le sens de variation de f, puis donner le tableau de variation.
5. Construire la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$.

Partie 3

Soit $\left(u_n\right)_{n>0}$ une suite telle que $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, et on pose $v_n = \ln u_n$.

1. Vérifier que $v_n = f\left(n\right)$, et déduire que $\left(u_n\right)_{n>0}$ est croissante.
2. Montrer que $\left(\forall x>0\right) \quad \ln\left(1+x\right) < x$, et déduire que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) u_n < e$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{v_k}{k}$.

3. Exprimer S_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.