AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Semestre 2 Devoir 2 Modèle 2

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1

Partie 1

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

Le tableau suivant est le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

1. Vérifier que $g(0) = 0$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(x^2 - x\right)e^{-x} + x$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : 1 cm).

1. Vérifier que $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$, puis en déduire que $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = x$.
3. Vérifier que $f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, et interpréter le résultat géométriquement.
5. Montrer que $f(x) - x$ et $x^2 - x$ ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$.
6. En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ est au dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[1; +\infty[$, et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0; 1]$.
7. Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
8. En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.
9. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
10. Vérifier que $f''(x) = \left(x^2 - 5x + 4\right)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
11. En déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4.

12. Construire (D) et $\left(\mathscr{C}_f\right)$ dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (on prend : $f(4) \approx 4.2$)

13. Montrer que la fonction $H: x \mapsto \left(x^2 + 2x + 2\right)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que $\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \frac{2e-5}{e}$.

14. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$.

15. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 8).
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

II- Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante : $(E) : y'' - 2y' + y = 0$

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la fonction h qui vérifie l'équation (E) et sa courbe passe par le point $O(0;0)$ et $h'(0) = -1$.
3. Vérifie que la fonction $g(x) = 2 - xe^x$ vérifie l'équation $(E_1) : y'' - 2y' + y = 2$.