

I- Exercice 1

Partie 1

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

Le tableau suivant est le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- Vérifier que $g(0) = 0$.
- Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- Vérifier que $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$, puis en déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = x$.
- Vérifier que $f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, et interpréter le résultat géométriquement.
- Montrer que $f(x) - x$ et $x^2 - x$ ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$.
- En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[1; +\infty[$, et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0; 1]$.
- Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Vérifier que $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4.

12. Construire (D) et $(\mathcal{C}_f)$ dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (on prend : $f(4) \approx 4.2$)
13. Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que $\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \frac{2e-5}{e}$.
14. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$.
15. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_f)$ et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 8).
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

II- Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante : $(E) : y'' - 2y' + y = 0$

1. Résoudre l'équation (E) .
2. Déterminer la fonction h qui vérifie l'équation (E) et sa courbe passe par le point $O(0;0)$ et $h'(0) = -1$.
3. Vérifie que la fonction $g(x) = 2 - xe^x$ vérifie l'équation $(E_1) : y'' - 2y' + y = 2$.