Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

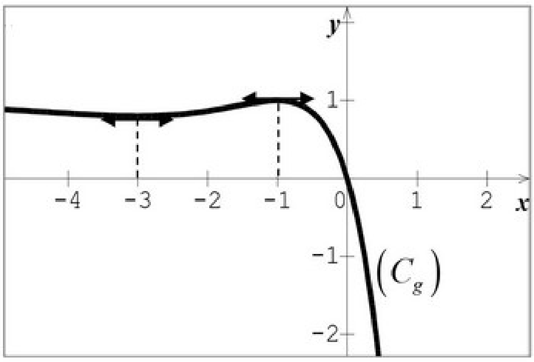
Semestre 2 Devoir 1 Modèle 2

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g\left(x\right)=1-\left(x+1\right)^{2}e^{x}$

1. Vérifier que $g(0)=0$.
2. A partir de la courbe représentative $\left(\mathscr{C}_{g}\right)$ de la la fonction g (figure ci-dessous), montrer que $g\left(x\right)\geq 0$ pour tout x appartenant à $\left]-\infty;0\right]$, et que pour tout x appartenant à $\left[0,+\infty\right[$,



On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right)=x+1-\left(x^{2}+1\right)e^{x}$

Soit $\left(\mathscr{C}_{f}\right)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ (unité : 2cm).

3. Vérifier que $f\left(x\right)=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^{2}-e^{x}$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(x+1\right)\right]$, et en déduire que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe $\left(\mathscr{C}_{f}\right)$ au voisinage de $-\infty$.
5. Montrer que la courbe $\left(\mathscr{C}_{f}\right)$ est en dessous de la droite (D).
6. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=-\infty$ (on pourra écrire $f\left(x\right)$ sous la forme $x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{x}\right]$).
7. Montrer que la courbe $\left(\mathscr{C}_{f}\right)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction.
8. Montrer que $f'\left(x\right)=g\left(x\right)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.
9. Montrer que la fonction f est croissante sur $\left]-\infty;0\right]$, et décroissante sur $\left[0,+\infty\right[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
10. Montrer que la courbe $\left(\mathscr{C}_{f}\right)$ admet deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1.

11. Construire dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ la droite (D) et la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ (on prendra $f(-3) \approx -2,5$ et $f(-1) \approx -0,75$).

II- Exercice 2

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2 + 2i$, $b = 4 - 4i$ et $c = 4 + 8i$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

2. Montrer que $z' = -iz - 4$.
3. Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R, et en déduire la nature du triangle ABC.

Soit ω l'affixe du point Ω, milieu du segment $[BC]$.

4. Montrer que $|c - \omega| = 6$.
5. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - \omega| = 6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.