

I- Exercice 1

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$$

1. Vérifier que $g(1) = 0$.
2. À partir du tableau de variations de la fonction g , montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 1]$, et que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$$

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 1cm).

3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, et interpréter géométriquement le résultat.
4. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
5. Montrer que la courbe (\mathcal{C}_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y = x$.
6. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$.
7. Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0; 1]$, et croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
8. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
9. Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$.
10. En déduire que la courbe (\mathcal{C}_f) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.
11. Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1; 2]$, et en

déduire la position relative de la courbe (\mathcal{C}_f) et la droite (D) sur l'intervalle $[1; 2]$.

12. Construire, dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la droite (D) et la courbe (\mathcal{C}_f) (On admettra que la courbe (\mathcal{C}_f) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2, 4 et 2, 5).

II- Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = \sqrt{2}(-1 + i)$ et $c = \sqrt{2}(-1 - i)$.

Soit E d'affixe e le milieu de segment $[AB]$.

1. Donner une forme trigonométrique des nombres complexes a, b et c .
2. Placer les points A, B et C sur le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
3. Montrer que le triangle OAB est isocèle, puis déduire une mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{OE}) .
4. Déterminer e , puis $|e|$.
5. Déduire $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.