AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Semestre 1 Devoir 2 Modèle 2

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1

Partie 1

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-x$

1. Vérifier que $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right):\ f(x)=x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\right)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, et étudier la branche infinie de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$.
3. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
6. Montrer que $(\forall x\in]0;1[):\ f(x)-x=x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-2\right)$.
7. En déduire que $(\forall x\in]0;1[):\ f(x)>x$.
8. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1,+\infty[$.
9. Montrer que le réel α vérifie $\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$, puis en déduire la valeur de α.

Partie 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{8} \\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

1. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}):\ \frac{1}{8}\leq u_n<1$
2. Déterminer le sens des variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

II- Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1+u_n}{\sqrt{3+{u_n}^2}} \\ u_0=0\end{cases}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

1. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}):\ 0\leq u_n\leq 1$.
2. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_{n+1}\geq\frac{1+u_n}{2}$.
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
4. Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}):\ 1-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(1-u_n)$.
5. En déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
6. Calculer la limite de la suite (u_n).