

I- Exercice 1

Partie 1

On considère la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - x$$

1. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 \right)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, et étudier la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
3. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
6. Montrer que $(\forall x \in]0; 1[) : f(x) - x = x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2 \right)$.
7. En déduire que $(\forall x \in]0; 1[) : f(x) > x$.
8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1, +\infty[$.
9. Montrer que le réel α vérifie $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$, puis en déduire la valeur de α .

Partie 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{8} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{8} \leq u_n < 1$
2. Déterminer le sens des variations de la suite (u_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

II- Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}} \\ u_0 = 0 \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$.

2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \geq \frac{1+u_n}{2}$.
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
4. Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (1 - u_n)$.
5. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
6. Calculer la limite de la suite (u_n) .