Mathématiques : 2Bac Eco-SGC

Semestre 1 Devoir 3 Modèle 2

**Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak**

# I- Exercice 1

On considère la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{8(x-1)}{x+2} + 1$

Et on considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

### Représentation graphique et conjectures

1. Dresser le tableau de variation de $f$ et montrer que $f([2;6]) \subset [2;6]$.
2. Calculer $u_1$ et $u_2$.
3. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,;\vec{j}\right)$.
4. Représenter sur le graphique les premiers termes de la suite $(u_n)$. Quelles conjectures peut-on faire ?

### Utilisation de la fonction $f$ pour déterminer la limite de $(u_n)$

5. Étudier les variations de $(u_n)$.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ 2 \leq u_n \leq 6$.
7. En déduire que $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

### Utilisation d'une suite intermédiaire pour déterminer la limite de $(u_n)$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N} \ : \ v_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1}$

8. Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique en précisant ses éléments caractéristiques.
9. Calculer $v_n$ puis un en fonction de $n$.
10. En déduire alors la limite de $(u_n)$.

### Utilisation du théorème d'encadrement pour déterminer la limite de $(u_n)$

11. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ \frac{3}{8}(6 - u_n) \leq 6 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(6 - u_n)$.
12. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 4\left(\frac{3}{8}\right)^n \leq 6 - u_n \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
13. En déduire la limite de $(u_n)$.

## II- Exercice 2

On considère la fonction $f$ définie sur $I = ]4;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x^3-26x^2+64x-31}{(x-4)^2}$

1. Trouver trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $(\forall x \in I) \ : \ f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-4)^2}$.
2. Déterminer les primitives $F$ de la fonction $f$ sur $I$.
3. Déterminer la primitive $G$ de la fonction $f$ telle que $G(2) = \frac{1}{2}$.

## III- Exercice 3

Une usine fabrique des pièce de rechange (au plus, 5000 pièces de rechange).
Le coût marginal est $C_m(k) = \frac{1}{4}k^3 - k^2 + 4$ tel que $k \in [0;5]$.

1. Déterminer le coût total $C_T(k)$ pour fabriquer $k$ mille pièce sachant que $C_T(0) = 45$.
2. En déduire le coût moyen $C_M(k)$ en fonction de $k$.