

### I- Exercice 1 (3 pts)

Calculer les limites suivantes en justifiant les résultats obtenus :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 7x^2 - x - 11) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2)(1 - x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{(x^2 - 2)(2x^2 + 1)} =$$

### II- Exercice 2 (7,5 pts)

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 + \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- Calculer les limites de la fonction  $f$  en  $(-\infty)$  et en  $(+\infty)$ . Justifier les résultats.
- Montrer que  $f$  est continue en 1.
- Montrer que  $f$  n'est pas dérivable à droite de 1.
- Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ .

On considère la restriction  $g$  de la fonction  $f$  sur  $] -\infty; 1[$ .

- Vérifier que  $x \in ] -\infty; 1[$  ;  $g(x) = \frac{x-3}{x-2}$ .
- Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.
- Donner une expression de  $g^{-1}(x)$  en fonction de  $x$ .

### III- Exercice 3 (4 pts)

Soit  $f$  une fonction continue sur les intervalles de son domaine de définition  $D_f$ , dont le tableau de variation est le suivant :

$x$	$-\infty$	$-3$	$2$	$+\infty$
$f$	$0$	$-1$	$+\infty$	$1$

Le tableau de variation est schématisé comme suit :  
 - À  $x = -\infty$ ,  $f = 0$ .  
 - À  $x = -3$ ,  $f = -1$ .  
 - À  $x = 2$ ,  $f = +\infty$ .  
 - À  $x = +\infty$ ,  $f = 1$ .  
 - Il y a une asymptote verticale à  $x = 2$  où  $f$  passe de  $+\infty$  à  $-\infty$ .

- Déterminer  $D_f$ .
- Déterminer l'intervalle  $f(I)$  dans chacun des cas suivants :

$$1 \quad I = ] - \infty; -3]$$

$$2 \quad I = [-3; 2[$$

$$3 \quad I = ]2; +\infty[$$

3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  en précisant les intervalles auxquelles elles appartiennent.
4. En déduire, en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ , le tableau de signe de  $f$ .

#### IV- Exercice 4 (3,5 pts)

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$

1. Calculer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .
2. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $0 < \alpha < 1$ .
3. Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-1}$ . Justifier votre réponse.

#### V- Exercice 5 (2 pts)

Une entreprise, réalise pour la fabrication et la vente d'une quantité  $q$  d'objets, un bénéfice donné par  $B(q) = 2(20 - q)\sqrt{q + 3}$  avec  $1 \leq q \leq 20$ .

1. Montrer que le bénéfice marginal est  $B'(q) = \frac{14-3q}{\sqrt{q+3}}$ .
2. Déterminer la quantité d'objets  $q_0$  à produire pour que le bénéfice soit maximal.