Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Semestre 1 Devoir 3 Modèle 2

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

I- Exercice 1 (4 pts)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$, on considère les points $A\,(2;0)$ et $B\left(1;\sqrt{3}\right)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$ et les distances AO et AB.
2. Calculer $\cos\overline{\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right)}$ et $\sin\overline{\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right)}$.
3. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right)$.
4. En déduire la nature du triangle ABC.

II- Exercice 2 (10 pts)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$, on considère les points $A\,(-1;2)$ et $B\,(3;-4)$.

Soit (C) l'ensemble des points M du plan qui vérifient : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = -4$

1. Montrer que $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ est une équation cartésienne de l'ensemble (C).
2. Montrer que (C) est un cercle de centre $\Omega\,(1;-1)$ et de rayon $R = 3$.
3. Vérifier que le point $K\,(1;2)$ appartient au cercle (C).
4. Donner une équation cartésienne de la droite (D) la tangente au cercle (C) en K.
5. Montrer que la droite (Δ) d'équation $x + y + 3 = 0$ coupe le cercle (C) en deux points.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle (C).
7. Résoudre graphiquement le système :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 < 0 \\ x + y + 3 > 0 \end{cases}$$
8. Vérifier que le point $H\,(1;4)$ est situé à l'extérieur du cercle (C).
9. Donner les équations des tangentes au cercle (C) et qui passe par le point $H\,(1;4)$.

III- Exercice 3 (6 pts)

Soit la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{2u_n+1}$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ u_n > 1$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
5. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $(u_{n+1} - 1) \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$
6. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$