

I- Exercice 1 (4 pts)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x^2-3}{2x^2+1}$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est majorée par le nombre $\frac{1}{2}$ sur D_f .
3. Est-ce que $\frac{1}{2}$ est une valeur maximale de f sur D_f ?
4. Montrer que f est minorée par le nombre -3 sur D_f .
5. Est-ce que -3 est une valeur minimale de f sur D_f ?

II- Exercice 2 (3 pts)

1. Donner la négation et étudier la valeur de vérité des propositions suivantes :

$$P : \left(\sqrt{2} < 14 \text{ et } \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \right)$$

$$Q : \left(17 \text{ est premier ou } \frac{7^{2022}+1}{2} \in \mathbb{N} \right)$$

$$R : (\exists x \in \mathbb{R}) \sqrt{x^2+5} = 3$$

$$S : (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 + 5x - 6 \neq 0$$

$$T : (\forall x \in \mathbb{N}) 6 \text{ divise } x \Rightarrow 2 \text{ divise } x$$

III- Exercice 3 (8 pts – Questions indépendantes)

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

$$1 \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\frac{x-1}{x+3}}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x-2}}}{\frac{x-1}{x+3}}$$

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq \frac{b}{2}$

2. En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que :

$$b \neq \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{2}{3}$$

3. En utilisant le raisonnement par équivalences successives, montrer que :

$$(\forall x \in]1; +\infty[) \frac{x+1}{\sqrt{2x-2}} > 1$$

4. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) 15 \text{ divise } 4^{2n+1} - 4$

5. Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^n = \frac{1}{5} (6^{n+1} - 1)$$

IV- Exercice 4 (5 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$

1. Étudier la parité de f .
2. Montrer que pour tous a et b de $\mathbb{R}$ tels que $a \neq b$, on a :
$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{2(a+b)}{(a^2+1)(b^2+1)}$$
3. Étudier la monotonie de f sur $[0; +\infty[$.
4. En déduire la monotonie de f sur $] -\infty; 0]$.
5. Dresser le tableau de variations de f .