

I- Exercice 1

1. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}-1} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - x - 1} - 2x - 1 &= \end{aligned}$$

II- Exercice 2

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$:

$$(\forall x \in [a, b] ; f(x) \in [a, b])$$

1. Montrer que la fonction f admet au moins un point fixe (càd $\exists c \in [a, b] ; f(c) = c$).

III- Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ par :

$$f(x) = x^2 - x \sin(x) - \cos(x)$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur I .
2. Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle I tel que $f(\alpha) = 0$.
3. Auquel des intervalles $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right[$ et $\left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right[$ appartient le réel α ? Justifier la réponse.
4. Donner le tableau de signe de la fonction f sur I .

IV- Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x$

1. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction g .
3. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) (g(x))^3 + g(x) = x$

4. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) g(x) \leq x$, puis calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(g(x))^3}$.

V- Exercice 5

1. Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{\sqrt[3]{256}} \times \sqrt[4]{64}}{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[6]{64 \times 10^6}}$$

$$B = \frac{\sqrt[15]{3} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt{9})^3}{\sqrt[4]{27} \times \sqrt{\sqrt{3}}}$$

$$C = \frac{\sqrt[4]{2048} \times \sqrt[4]{160000}}{\sqrt[8]{4096} \times \sqrt[3]{\sqrt{256} \times \sqrt{512}}}$$