AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 1 Devoir 1 Modèle 2

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1 (12 pts)

Partie 1

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E)\ :\ x^3+3x-4=0$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\alpha=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

2. Établir que α est une solution de (E), puis en déduire que $\alpha=1$.

Partie 2

On considère la fonction numérique définie par :

$$g(x)=\frac{2}{3}.\frac{Arc\tan\left(\sqrt[4]{x}-1\right)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$$

1. Déterminer D_g, le domaine de définition de g.
2. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.
3. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 1 qu'on déterminera.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)E\left(\frac{1}{x-1}\right)\ si\ x\neq0 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en 1.
2. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

II- Exercice 2 (8 pts)

Soit α un réel de l'intervalle $]0;1[$.

On considère les suites numériques (a_n) et (S_n) définies par : $a_n=(1-\alpha)^n$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$.

1. Montrer que les suites (a_n) et (S_n) convergent puis calculer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.
3. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq u_0 + \frac{1}{\alpha u_0}$.
5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.