



Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 12 (Géométrie analytique de l'espace)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Coordonnées d'un point

1-1/ Base et repère de l'espace ($\mathcal{E}$)

1-2/ Coordonnées d'un point par rapport un repère –
Coordonnées d'un vecteur par rapport une base

1-3/ Coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\alpha \vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$

II- Deux vecteurs colinéaires - Trois vecteurs coplanaires

2-1/ Conditions de colinéarité de deux vecteurs

2-2/ Conditions de coplanarité de trois vecteurs

III- Représentation paramétrique d'une droite de l'espace ($\mathcal{E}$)

IV- Positions relatives de deux droites dans l'espace ($\mathcal{E}$)

V- Représentation paramétrique d'un plan – Équation cartésienne d'un plan de l'espace ($\mathcal{E}$)

5-1/ Représentation paramétrique d'un plan

5-2/ Équation cartésienne d'un plan de l'espace ($\mathcal{E}$)

5-3/ Positions relatives de deux plans

VI- Système de deux équations cartésiennes d'une droite de l'espace ($\mathcal{E}$)

6-1/ Système de deux équations cartésiennes d'une droite

6-2/ Positions relatives d'une droite et un plan de l'espace ($\mathcal{E}$)

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

7-2/ Exercice 2

7-3/ Exercice 3

7-4/ Exercice 4

7-5/ Exercice 5

7-6/ Exercice 6

I- Coordonnées d'un point

1-1/ Base et repère de l'espace ($\mathcal{E}$)

Vocabulaire

Le triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ s'appelle base de l'espace .

On dit que l'espace ($\mathcal{E}$) est muni (ou rapporté) de la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Le quadruplet $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ s'appelle repère de l'espace.

On dit que l'espace ($\mathcal{E}$) est muni (ou rapporté au) du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1-2/ Coordonnées d'un point par rapport un repère - Coordonnées d'un vecteur par rapport une base

Définition

Pour tout point M de l'espace ($\mathcal{E}$) muni du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, il existe un

et un seul triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $OM = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Le triplet (x, y, z) s'appelle les coordonnées du point M par rapport au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On note : $M(x, y, z)$ ou $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

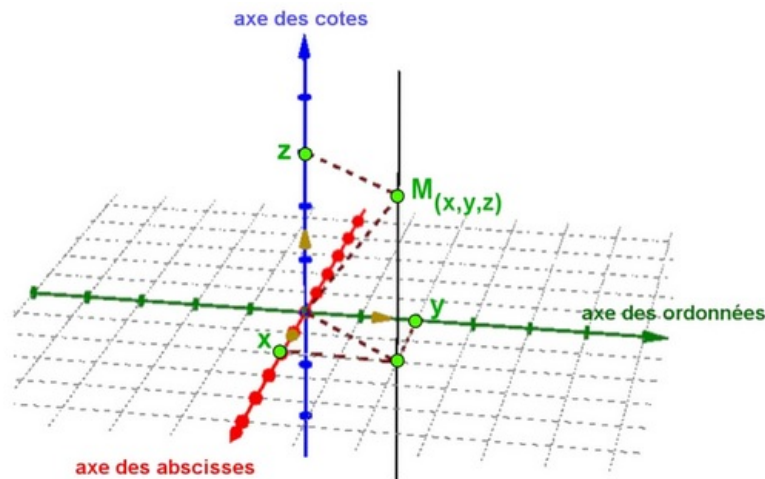
Le triplet (x, y, z) s'appelle aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ de l'espace ($\mathcal{E}$) par rapport au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ (ou encore par rapport à la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$).

On note : $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$ ou $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Le nombre réel x s'appelle l'abscisse du point M de l'espace $(\mathcal{E})$ par rapport au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Le nombre réel y s'appelle l'ordonnée du point M de l'espace $(\mathcal{E})$ par rapport au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Le nombre réel z s'appelle la cote du point M de l'espace $(\mathcal{E})$ par rapport au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.



1-3/ Coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\alpha \vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$

Propriété

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs et $A(a, b, c)$ et $B(a', b', c')$ deux points de l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, et I le milieu du segment $[AB]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a :

- 1) $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)(x + x', y + y', z + z')$ et $\alpha \vec{u}(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
- 2) $\overrightarrow{AB}(a' - a, b' - b, c' - c)$
- 3) $I\left(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}, \frac{c+c'}{2}\right)$

II- Deux vecteurs colinéaires - Trois vecteurs coplanaires

2-1/ Conditions de colinéarité de deux vecteurs

Propriété (Rappel)

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de tel que $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ ou $\vec{u} = \alpha \vec{v}$.

Déterminants extraites de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

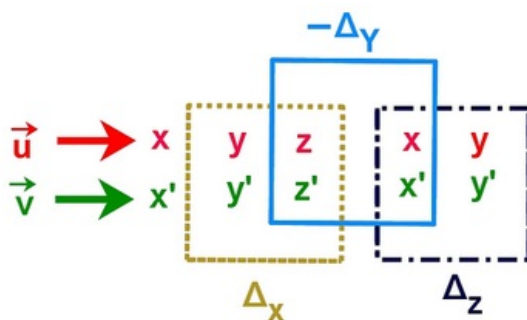
Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace ($\mathcal{E}$) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les déterminants suivants :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}; \Delta_y = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}; \Delta_z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

s'appellent les déterminants extraites de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ (les déterminants extraites de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous nuls).



2-2/ Condition de coplanarité de trois vecteurs

Déterminant de trois vecteurs de l'espace

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ et $\vec{w}(x'', y'', z'')$ trois vecteurs de l'espace ($\mathcal{E}$) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le nombre :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (xy'z'' - xz'y'') + (-yx'z'' + yz'x'') + (zx'y'' - zy'x'')$$

est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cet ordre.

Propriété

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ et $\vec{w}(x'', y'', z'')$ trois vecteurs de l'espace ($\mathcal{E}$) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

III- Représentation paramétrique d'une droite de l'espace ($\mathcal{E}$)

Définition

Le système
$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
 s'appelle représentation paramétrique de la droite $D \left(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$

Remarques

Pour chaque valeur du paramètre t on obtient un point et un seul, et la réciproque est vraie.

Par exemple : la valeur $t = 0$ donne le point $A(x_0, y_0, z_0)$.

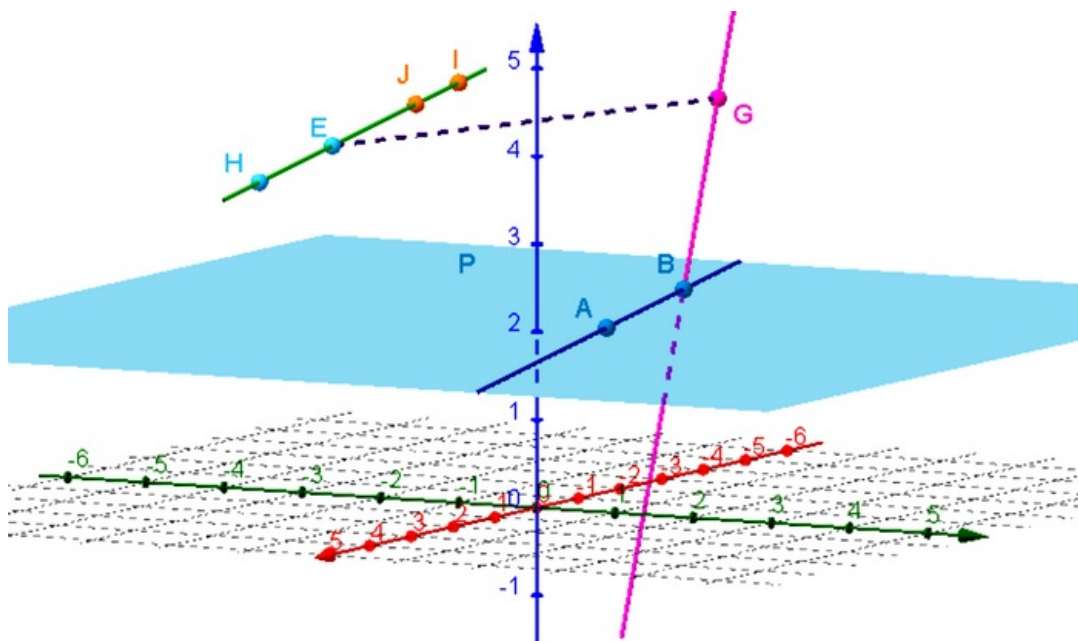
La représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$ n'est pas unique, on peut remplacer (x_0, y_0, z_0) par (x_1, y_1, z_1) coordonnées du point B à condition que $B \in D(A, \vec{u})$.

IV- Positions relatives de deux droites dans l'espace ($\mathcal{E}$)

Activité

On considère dans l'espace ($\mathcal{E}$) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les droites (AB) et (EH) et (IJ) et (BG) .

- Déduire les différentes positions relatives distinctes entre deux droites :



Propriété

$D(A, \vec{u})$ et $D'(B, \vec{v})$ sont deux droites de l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) $(D) = (D') \Leftrightarrow (\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et les deux droites ont un point commun).

2) (D) et (D') sont strictement parallèles $\Leftrightarrow (\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et les deux droites n'ont pas un point commun).

3) $(D) \cap (D') = \{I\} \Leftrightarrow (\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et le point I est commun aux deux droites).

4) (D) et (D') sont deux droites non coplanaires $\Leftrightarrow (\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et les deux droites n'ont pas des points communs) $\Leftrightarrow (\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{AB}$ ne sont pas coplanaires) $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}) \neq 0$.

V- Représentation paramétrique d'un plan - Équation cartésienne d'un plan de l'espace $(\mathcal{E})$

5-1/ Représentation paramétrique d'un plan

Définition

Le système
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$$
 s'appelle représentation

paramétrique du plan $P\left(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right)$ de l'espace $(\mathcal{E})$.

Remarques

Pour chaque valeur du paramètre α et du paramètre β on obtient un point et un seul, et la réciproque est vraie.

La représentation paramétrique du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ n'est pas unique, on peut remplacer (x_0, y_0, z_0) par (x_1, y_1, z_1) coordonnées du point B à condition que $B \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

5-2/ Équation cartésienne d'un plan de l'espace $(\mathcal{E})$

Définition et propriété

Soit $P \left(A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix} \right)$ un plan de l'espace ($\mathcal{E}$) rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right)$.

Le plan (P) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace ($\mathcal{E}$) qui vérifie l'équation :

$$(x - x_0)\Delta_x + (y - y_0)\Delta_y + (z - z_0)\Delta_z = 0$$

avec $a = \Delta_x$ et $b = \Delta_y$ et $c = \Delta_z$ sont les déterminants extraites de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

L'équation $(x - x_0)\Delta_x + (y - y_0)\Delta_y + (z - z_0)\Delta_z = 0$ s'appelle équation cartésienne du plan $P \left(A, \vec{u}, \vec{v} \right)$.

En générale l'équation s'écrit $P \left(A, \vec{u}, \vec{v} \right) : ax + by + cz + d = 0$, avec

$a = \Delta_x$ et $b = \Delta_y$ et $c = \Delta_z$ et $d = -x_0\Delta_x + y_0\Delta_y - z_0\Delta_z$ sont des réels et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (au moins un nombre est non nul).

Application

On donne l'équation cartésienne du plan $P \left(O, \vec{i}, \vec{j} \right)$.

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) &\in P \left(O, \vec{i}, \vec{j} \right) \\ \Leftrightarrow \det \left(\overrightarrow{AM}, \vec{i}, \vec{j} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= 0 \end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$(P) : ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a = \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ b = \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow P : z + d = 0 \\ c = \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{cases}$$

$$O(0,0,0) \in (P) \Rightarrow 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$\Rightarrow (P) : z = 0$$

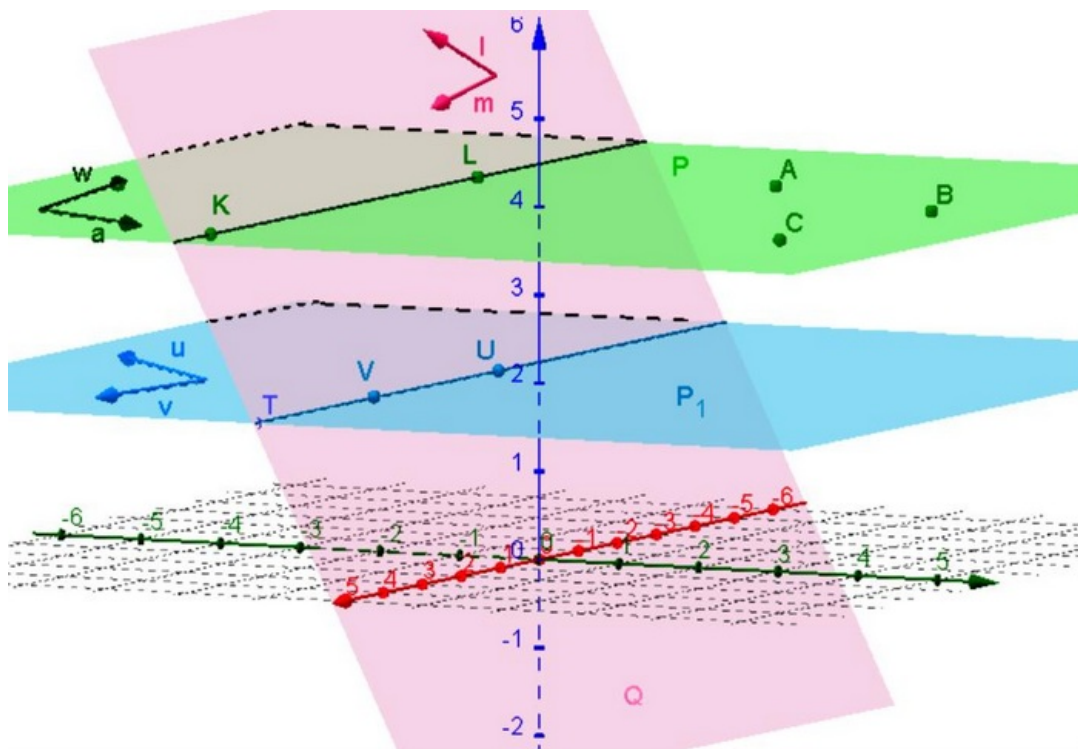
5-3/ Positions relatives de deux plans

Activité

On considère dans l'espace ($\mathcal{E}$) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les droites

(P) et (P_1) et (Q) et (ABC)

Déduire les différentes positions relatives distinctes entre deux plans :



Propriété

$(P) : ax + by + cz + d = 0$ et $(P') : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont deux plans de l'espace ($\mathcal{E}$) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Les 2 plans sont confondus :

$$(P) = (P') \Leftrightarrow a' = ka \text{ et } b' = kb \text{ et } c' = kc \text{ et } d' = kd \text{ et } k \neq 0$$

$$(P) = (P') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

2) Les 2 plans sont strictement parallèles :

$$(P) \cap (P') = \emptyset \Leftrightarrow a' = ka \text{ et } b' = kb \text{ et } c' = kc \text{ et } d' \neq kd \text{ et } k \neq 0$$

$$(P) = (P') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ et } d' \neq kd$$

3) Les 2 plans sont sécants suivant une droite :

$$(P) \cap (P') = (D) \Leftrightarrow \vec{u}(a, b, c) \text{ et } \vec{v}(a', b', c') \text{ ne sont pas colinéaires}$$

$$(P) \cap (P') = (D) \Leftrightarrow \text{au moins deux des rapports suivants } \frac{a}{a'}, \frac{b}{b'} \text{ et } \frac{c}{c'} \text{ ne soient pas égaux.}$$

$$4) P(A, \vec{u}, \vec{v}) \text{ et } P'(B, \vec{u}', \vec{v}') \text{ sont deux plans sécants} \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ et } \vec{u}',$$

sont coplanaires, et aussi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{v}'$)

$$\Leftrightarrow \left(\det \begin{pmatrix} \vec{u}, \vec{v}, \vec{u}' \end{pmatrix} = 0 \text{ et } \det \begin{pmatrix} \vec{u}, \vec{v}, \vec{v}' \end{pmatrix} = 0 \right).$$

VI- Système de deux équations cartésiennes d'une droite de l'espace ($\mathcal{E}$)

6-1/ Système de deux équations cartésiennes d'une droite

Propriété et définition

Dans l'espace ($\mathcal{E}$) rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite $D(A(x_0, y_0, z_0), \vec{u}(a, b, c))$.

Un point $M(x, y, z)$ de l'espace ($\mathcal{E}$) appartient à la droite $D(A, \vec{u})$ si et seulement si on a :

- 1er cas : on suppose que les nombres a et b et c sont non nuls :

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite $D(A, \vec{u})$.

- 2ème cas : on suppose qu'un nombre seul parmi les nombres a et b et c est nul (on suppose que $a = 0$)

$x - x_0 = 0$ et $\frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite $D(A, \vec{u})$.

- 3ème cas : on suppose que juste deux nombres parmi les nombres a et b et c sont nuls (on suppose que $a = 0$ et $c = 0$)

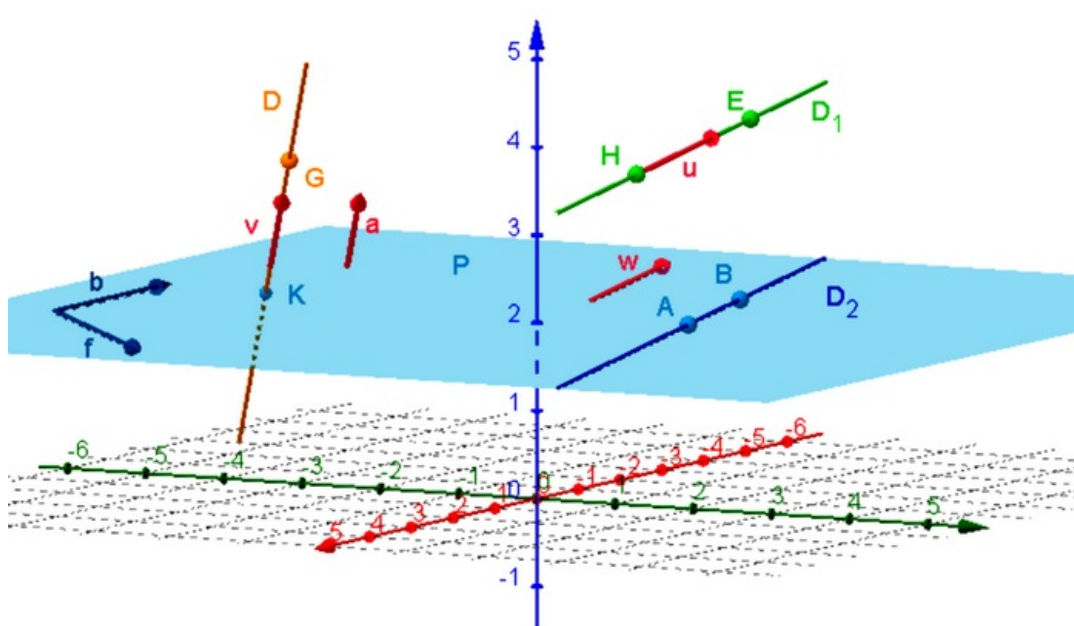
$x - x_0 = 0$ et $z - z_0 = 0$ s'appelle système de deux équations cartésiennes de la droite $D(A, \vec{u})$.

6-2/ Positions relatives d'une droite et un plan de l'espace ($\mathcal{E}$)

Activité

□

-



Soient $D(B, \vec{w})$ une droite et $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ un plan de l'espace $(\mathcal{E})$ rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2) Le droite (D) est strictement parallèle u plan (P) $\Leftrightarrow$ (les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et $B \notin (P)$) $\Leftrightarrow \left(\det \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right) = 0 \text{ et } B \notin (P) \right)$.

3) La droite (D) coupe le plan (P) au point $A \Leftrightarrow$ (les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires) $\Leftrightarrow \left(\det \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right) \neq 0 \right)$.

7-1/ Exercice 1

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

2. Déterminer m pour que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

7-2/ Exercice 2

On considère les points $A(1; 2; -1)$, $B(-1; 3; 1)$, $C(5; 0; -5)$ et $E(1; 3; 0)$.

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

1. Montrer que si $M \in (AB)$, alors $(\exists t \in \mathbb{R})$ tel que le système

$$(S) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \text{ est une représentation paramétrique de la droite } (AB).$$

2. Montrer que $C \in (AB)$.
3. Le point E appartient-il à la droite (AB) ?

7-3/ Exercice 3

1. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (D) passant par le point $A(-1; -2; \frac{1}{3})$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-2; \frac{1}{2}; 1)$.

Soit (Δ) une droite définie par ses deux équations cartésiennes suivantes :

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{3y-2}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

2. Déterminer un vecteur directeur de la droite (Δ) et un point de (Δ) .
3. Dédire une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

7-4/ Exercice 4

On considère les points $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 3; 1)$ et $C(3; 3; -1)$.

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

2. Montrer que $M \in (ABC) \Leftrightarrow (\exists (t; t') \in \mathbb{R}^2) : \begin{cases} x = 1 - 2t + 2t' \\ y = 2 + t + t' \\ z = 3 - 2t + 4t' \end{cases}$ le système est une représentation paramétrique du plan (ABC) .
3. En déduire que $M(x; y; z) \in (ABC) \Leftrightarrow x + 6y - 2z - 7 = 0$.

7-5/ Exercice 5

1. Étudier les positions relatives de la droite (D) et la droite (Δ) dans les cas suivants :

$$\begin{aligned}
1 \quad (D) : & \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } (\Delta) : \begin{cases} x = -1 - t' \\ y = 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \\
2 \quad (D) : & \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } (\Delta) : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = 3 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \\
3 \quad (D) : & \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } (\Delta) : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 \\ z = 3 - 2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

7-6/ Exercice 6

1. Étudier la position relative de la droite (D) et le plan (P) dans les cas suivants :

$$\begin{aligned}
1 \quad (D) : & \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } (P) : 3x + 2y + z + 1 = 0 \\
2 \quad (D) : & \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } (P) : x + 3y + z + 4 = 0
\end{aligned}$$