Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 11 (Vecteurs de l'espace)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Égalité de deux vecteurs - Somme de deux vecteurs

1-1/ Éléments caractéristiques d'un vecteur

Soient A et B deux points différents de l'espace.

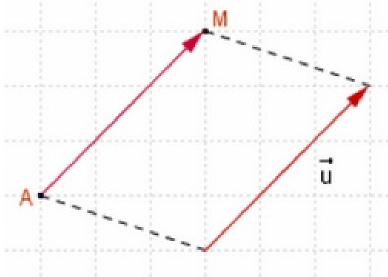
Si on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ alors :

- La direction du vecteur $\overrightarrow{u}$ est la droite (AB).
- Le sens du vecteur $\overrightarrow{u}$ est celui de A vers B.
- La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est la distance AB, et on écrit : $||\overrightarrow{u}|| = AB$.

Remarques

Pour tout point A de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ n'a pas de direction et sa norme est nulle, $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul, et on écrit : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

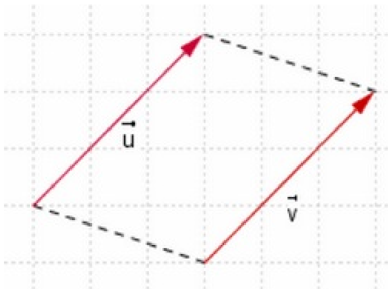
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout point A de l'espace, il existe un et un seul point M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$.



1-2/ Égalité de deux vecteurs

Définition

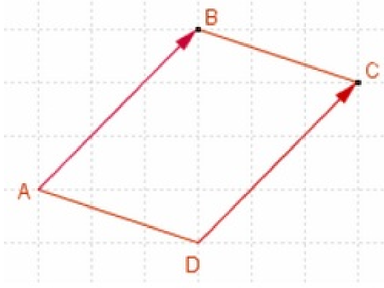
On dit que deux vecteurs sont égaux, s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.



Propriété

Soit $ABCD$ un quadrilatère dans l'espace.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



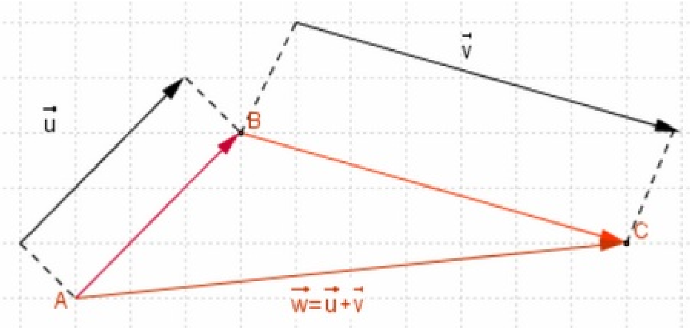
1-3/ Somme de deux vecteurs

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que :

Si on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, alors $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$ et on écrit : $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.



Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C de l'espace, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Opposé d'un vecteur

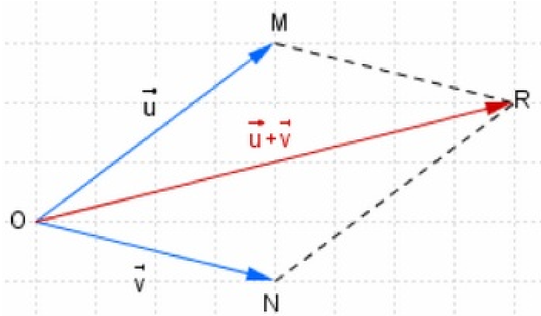
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, l'opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$ et le vecteur qui a la même direction, et la même norme que le vecteur $\overrightarrow{u}$, mais il est de sens contraire au vecteur $\overrightarrow{u}$, il est noté $-\overrightarrow{u}$.

Pour tout points A et B on a : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Remarque

Soient O, M, N et R quatre points de l'espace.

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR}$ si et seulement si $OMNR$ est un parallélogramme.



II- Colinéarité de deux vecteurs - Définition vectorielle d'une droite

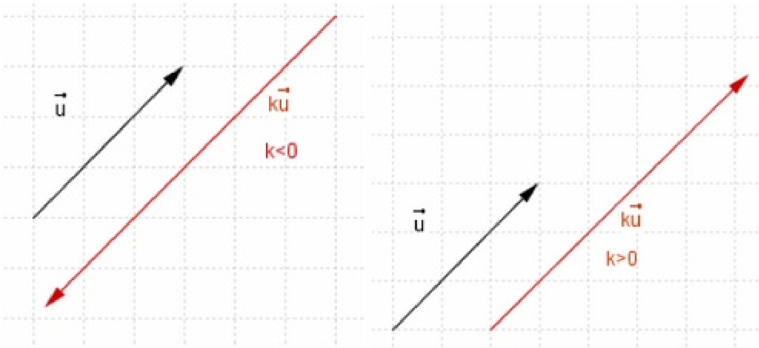
2-1/ Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul.

Le produit du vecteur u par le réel k est le vecteur noté $k.\overrightarrow{u}$, ou simplement $k\overrightarrow{u}$, qui vérifie les condition suivants :

- $k\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ ont la même direction.
- $||k\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||$
- $k\overrightarrow{u}$ a le même sens que celui de $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$
- $k\overrightarrow{u}$ a de sens contraire que celui de $\overrightarrow{u}$ si $k < 0$



Propriétés

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tous réels k et k' on a :

$$(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$$
$$k\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$$
$$k\left(k'\overrightarrow{u}\right) = (kk')\overrightarrow{u}$$
$$k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow k = 0\ ou\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$
$$1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$$

2-2/ Colinéarité de deux vecteurs - Alignement de trois points

Définition

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.

Conséquences

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaire)⇔(A, B et C sont alignés).

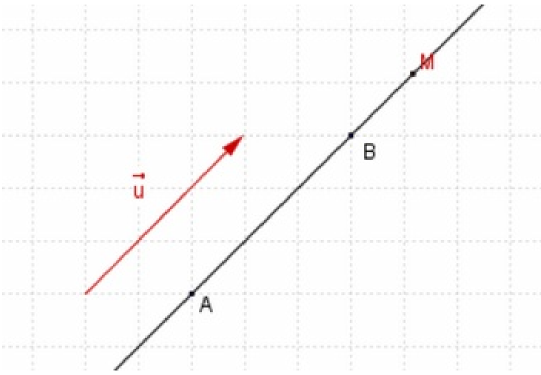
($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaire)⇔($(AB)//(CD)$).

2-3/ Définition vectorielle d'une droite de l'espace

Définition

Soient A et B deux ponts distincts de l'espace.

Tout vecteur non nul colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de (AB).



Propriété

Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$ où $k \in \mathbb{R}$, est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Cette droite est notée $D\left(A; \overrightarrow{u}\right)$.

On a : $D\left(A; \overrightarrow{u}\right) = \left\{M \in (\mathscr{E}) / \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}\ ;\ k \in \mathbb{R}\right\}$. (où $(\mathscr{E})$=l'espace).

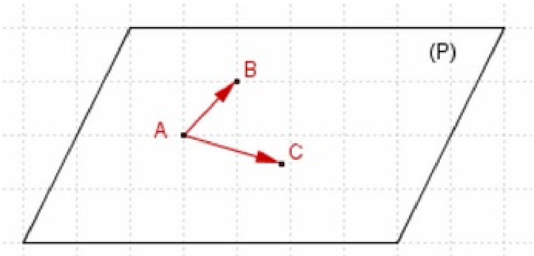
III- Définition vectorielle d'un plan - Les vecteurs coplanaires

3-1/ Définition vectorielle d'un plan

Définition

Soit (P) un plan de l'espace et A, B et C trois points non alignés du plan (P).

On dit que (P) est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



Remarque

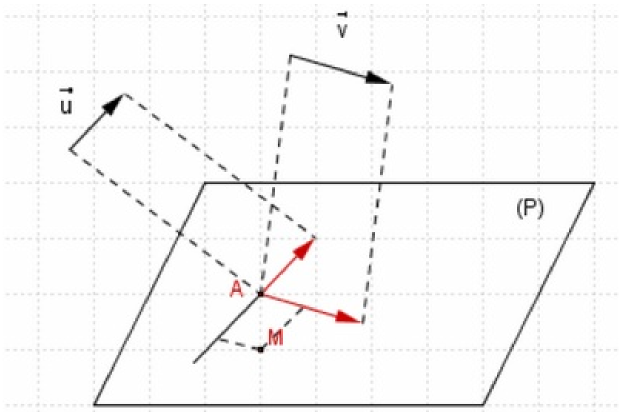
$\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont aussi des vecteurs directeurs du plan (P).

Conséquence

Deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et un point A définissent un plan unique noté : (P).

Ce plan passant par A et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs directeurs.

On écrit $(P) = P\left(A; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$.



3-2/ Vecteurs coplanaires

Définition

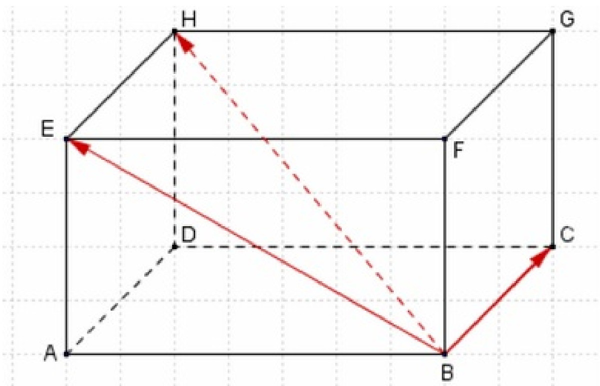
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe quatre points coplanaires A, B, C et D tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Exemple

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.

On a les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires car les points B, C, E et H sont coplanaires.
$\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas coplanaires car $BDEH$ est un tétraèdre.



Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non alignés et $\vec{w}$ un vecteur de l'espace.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si, il existe deux nombres réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Conséquences

Soient A, B, C et M des points de l'espace.

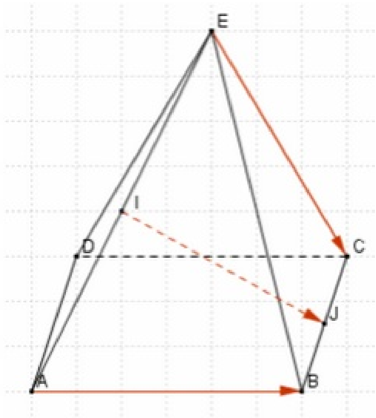
S'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, alors les points A, B, C et M sont coplanaires.

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

$EABCD$ est un pyramide de base le rectangle $ABCD$,I est le milieu du segment
$[AE]$ et J est le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.



4-2/ Exercice 2

Soit $ABCD$ un tétraèdre, et soit le point M de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

1. Montrer que $M \in (ABC)$.
2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

4-3/ Exercice 3

Soit $ABCD$ un tétraèdre, et soient les points K, L, M et N tel que
$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AD}$ et L le milieu du $[BK]$.

1. Écrire les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que les points L, M et N sont alignés, et déterminer la position du point L sur la droite (MN).
3. Déterminer les réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AL} + \beta\overrightarrow{AM}$. Que peut-on dire des points A, M, D et L ?

4-4/ Exercice 4

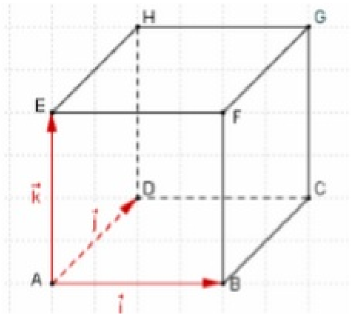
Soit $ABCDEFGH$ un cube.

On pose : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ avec I le milieu du segment $[HG]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AI).

Soient la droite (Δ) passant par le point G et parallèle (AI), et le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG}$.

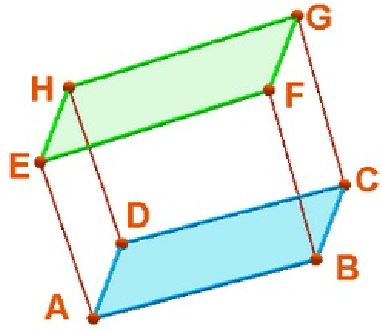
2. Montrer que $M \in (\Delta)$.



4-5/ Exercice 5

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle ou pavé droit, et soit le point I de l'espace tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = 3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG}$, et que $\overrightarrow{IE} = -\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID}$.
2. Que peut-on dire des points I, B, D et E.



4-6/ Exercice 6

Soit $ABCDEFGH$ un cube avec I le milieu du segment $[AB]$, J le milieu de $[AD]$ et K un point tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AG}$.

1. Écrire les vecteurs $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EK}$ en fonction de $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$.
2. Vérifier que $5\overrightarrow{EK} = 2\overrightarrow{EI} + 2\overrightarrow{EJ}$.
3. En déduire que les points I, J, K et E sont coplanaires.