AlloSchool

Mathématiques : Tronc Commun

Séance 14 (Géométrie dans l'espace)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Les axiomes de l'espace

II- Détermination d'un plan

III- Positions relatives dans l'espace

3-1/ Positions relatives de deux droites

3-2/ Positions relatives d'une droite et d'un plan

3-3/ Positions relatives de deux plans

IV- Parallélisme dans l'espace

4-1/ Parallélisme de deux droites

4-2/ Parallélisme d'une droite et un plan

4-3/ Parallélisme de deux plans

V- Orthogonalité dans l'espace

5-1/ Orthogonalité de deux droites

5-2/ Orthogonalité d'une droite et un plan

5-3/ Orthogonalité de deux plans

VI- Surfaces et volumes de certains solides

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

7-2/ Exercice 2

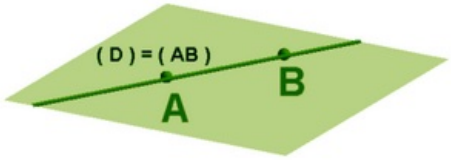
7-3/ Exercice 3

7-4/ Exercice 4

I- Les axiomes de l'espace

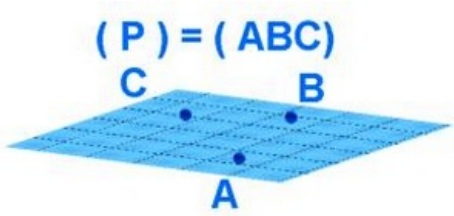
Axiome 1

Par deux points distincts A et B de l'espace $(\mathscr{E})$ passe une et une seule droite notée (AB).



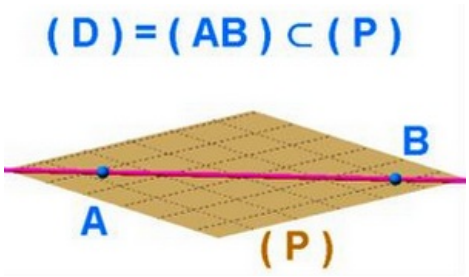
Axiome 2

Par trois points non alignés de l'espace ($\mathscr{E}$) passe un plan et un seul noté (ABC).



Axiome 3

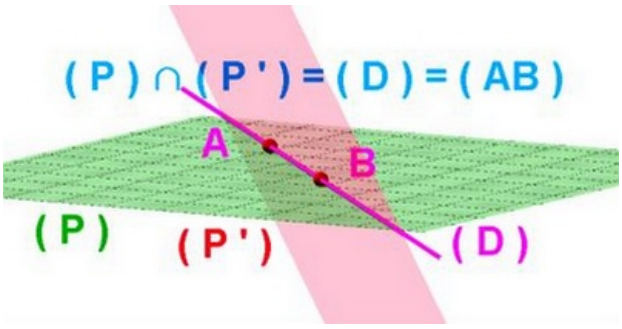
Si A et B sont deux points distincts d'un plan (P) de l'espace ($\mathscr{E}$), alors la droite (AB) est incluse dans le plan (P).



Axiome 4

(P) et (P') sont deux plans distincts de l'espace ($\mathscr{E}$).

Si un point A est commun aux deux plans, alors les deux plans se coupent suivant une droite passant par le point A.



II- Détermination d'un plan

Toutes les propriétés de la géométrie plane reste valables à chaque plan (P) de l'espace ($\mathscr{E}$).

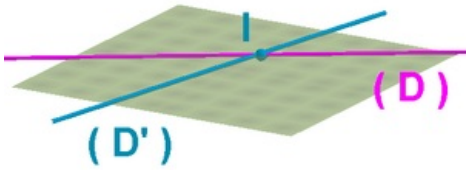
Un plan (P) est déterminé soit par :

1. Une droite (D) et un point qui n'appartienne pas à cette droite ($A \notin (D)$).
2. Trois points A et B et C non alignés de l'espace ($\mathscr{E}$).
3. Deux droites (D) et (D') sécantes de l'espace ($\mathscr{E}$).
4. Deux droites (D) et (D') strictement parallèles de l'espace ($\mathscr{E}$).

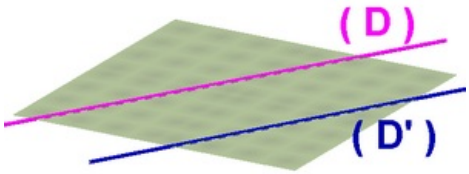
III- Positions relatives dans l'espace

3-1/ Positions relatives de deux droites

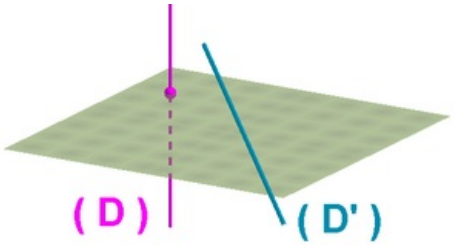
Cas 1 : (D) et (D') sont sécantes au point I : $((D) \cap (D') = \{I\})$



Cas 2 : (D) et (D') sont parallèles : $(D)//(D')$

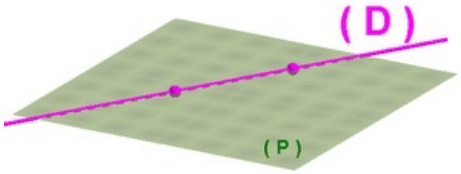


Cas 3 : (D) et (D') sont non coplanaires : $(D) \cap (D') = \emptyset$



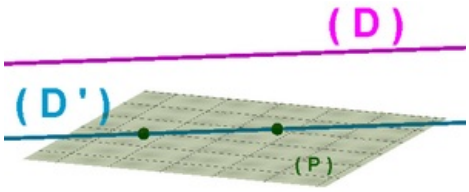
3-2/ Positions relatives d'une droite et d'un plan

Cas 1 : (D) est incluse dans le plan (P) : $(D) \subset (P)$



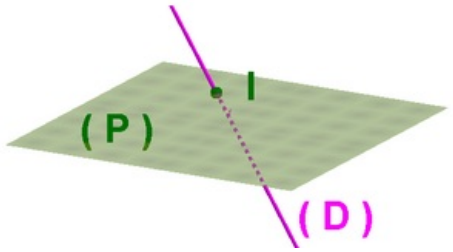
$$(D) \cap (P) = (D)$$

Cas 2 : (D) et (P) sont strictement parallèles : $(D)//(P)$



$$(D) \cap (P) = \emptyset$$

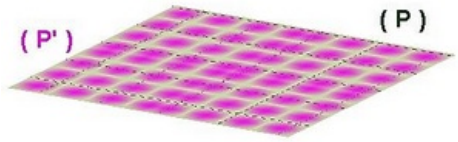
Cas 3 : (D) coupe le plan (P) au point I



$$(D) \cap (P) = \{I\}$$

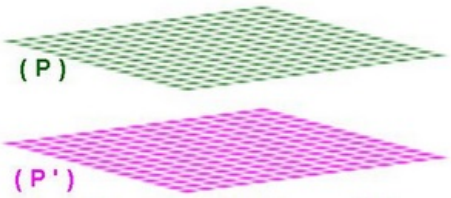
3-3/ Positions relatives de deux plans

Cas 1 : (P) et (P') sont confondus : $(P) = (P')$



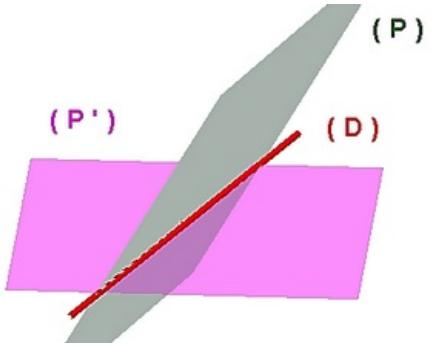
$$(P) \cap (P') = (P)$$

Cas 2 : (P) et (P') sont strictement parallèles : $(P) // (P')$



$$(P) \cap (P') = \emptyset$$

Cas 3 :(P) et (P') sont sécants suivant une droite (D)



$$(P) \cap (P') = (D)$$

IV- Parallélisme dans l'espace

4-1/ Parallélisme de deux droites

Définition

Deux droites (D) et (D') de l'espace sont parallèles si et seulement si :

- (D) et (D') sont coplanaires disjointes.

Ou

- (D) et (D') sont confondues.

On note $(D) // (D')$

Propriétés

1- D'un point O de l'espace passe une et une seule droite (Δ) parallèle a une droite (D) donnée de l'espace.

2- Soient (D), (D') et (Δ) trois droites de l'espace $(\mathscr{E})$.

- Si (D) et (D') sont parallèles et une droite (Δ) est parallèle à l'une des deux droites, alors (Δ) est parallèle à l'autre droite :

$$\begin{cases} (D)//(D') \\ (\Delta)//(D) \end{cases} \Rightarrow (\Delta)//(D')$$

- Si une droite (Δ) est parallèle à chacune des droites (D) et (D'), alors (D) et (D') sont parallèles :

$$\begin{cases} (\Delta)//(D') \\ (\Delta)//(D) \end{cases} \Rightarrow (D)//(D')$$

4-2/ Parallélisme d'une droite et un plan

Définition

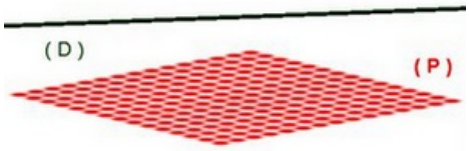
Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si :

- La droite (D) est un incluse dans le plan (P) : $(D) \subset (P)$



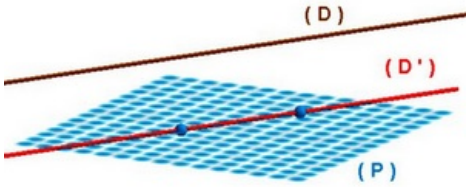
Ou

- (D) et (P) sont disjoints : $(D) \cap (P') = \emptyset$



Propriété

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si : il existe une droite (D') incluse dans le plan (P) tel que (D) et (D') sont parallèles.



4-3/ Parallélisme de deux plans

Définition

Deux plans (P) et (P') sont parallèles si et seulement si :

- (P) et (P') sont confondus : $(P) = (P')$

Ou

- (P) et (P') sont disjoints : $(P) \cap (P') = \emptyset$

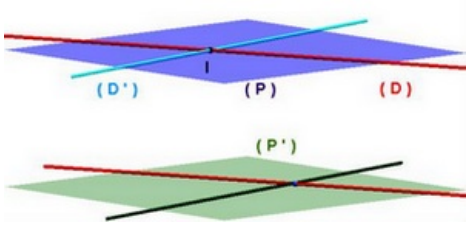
Propriétés

1- D'un point O de l'espace passe un et un seul plan (P') parallèle a un plan (P) donné de l'espace.

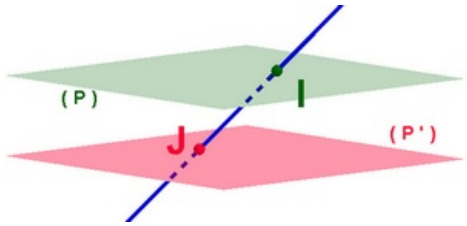
2- Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, alors tout plan (Q) parallèle à l'un des deux plans est parallèle à l'autre plan.

3- Si un plan (Q) est parallèle à chacun des plans (P) et (P'), alors les deux plans (P) et (P') sont parallèles.

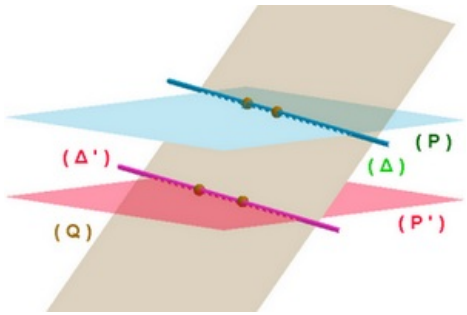
4- Deux plans (P) et (P') sont parallèles si et seulement si l'un d'eux contient deux droites sécantes (D) et (D') parallèles au deuxième plan :



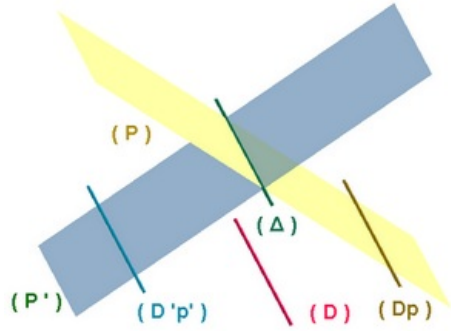
1- Si deux plans(P) et (P') sont parallèles, alors toute droite (D) qui coupe l'un des deux plans coupe l'autre plan :



2- Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, alors tout plan (Q) qui coupe l'un des deux plans suivant une droite (Δ) coupe l'autre plan suivant une droite (Δ') et les droites sont parallèles :



3- Si une droite (D) est strictement parallèle à deux plans sécants (P) et (P') suivant une droite (Δ), alors les deux droites (D) et (Δ) sont parallèles :



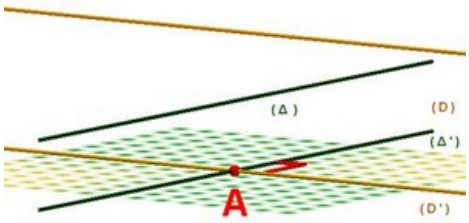
V- Orthogonalité dans l'espace

5-1/ Orthogonalité de deux droites

Définition

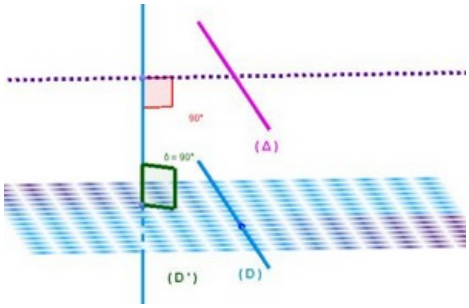
(D) et (Δ) deux droites sont orthogonales si et seulement si deux droites (D') et (Δ') sont sécantes à un point A de l'espace et orthogonales tel que $(D)//(D')$ et $(\Delta)//(\Delta')$.

On note : $(\Delta) \perp (D)$.

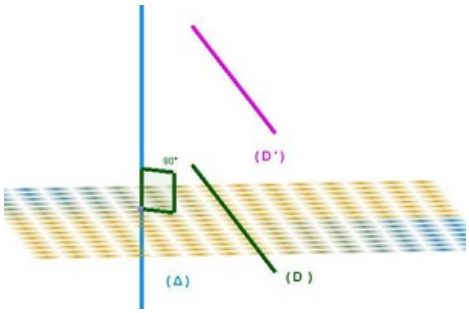


Propriétés

Si deux droites (D) et (D') sont orthogonales, alors toute droite (Δ) parallèle à l'une de ces deux droites est orthogonale à l'autre droite.



Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, alors toute droite (Δ) orthogonale à l'une des deux droites est orthogonale à l'autre droite.

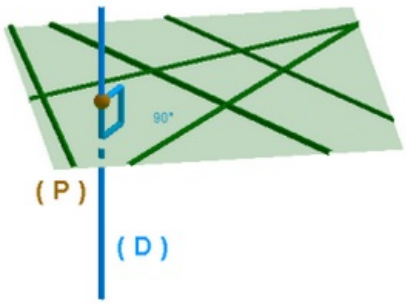


5-2/ Orthogonalité d'une droite et un plan

Définition

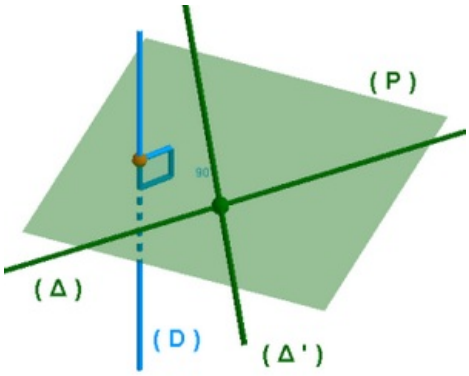
Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) de l'espace si et seulement si la droite (D) est orthogonale à toute droite (Δ) du plan (P).

On note : $(D) \perp (P)$, et on lit : (D) est orthogonale au plan (P).

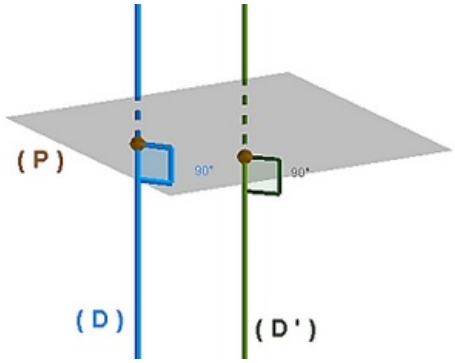


Propriétés

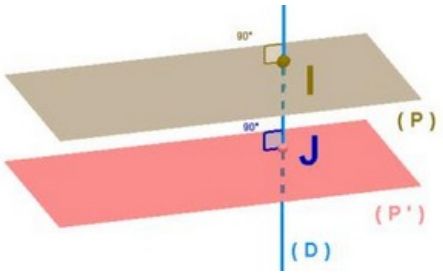
1- Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) de l'espace si et seulement si la droite (D) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (P).



2- Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, alors tout plan (P) orthogonal à l'une de ces deux droites est orthogonal à l'autre droite.



3- Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, alors toute droite (D) orthogonale à l'un des deux plans est orthogonale à l'autre plan.

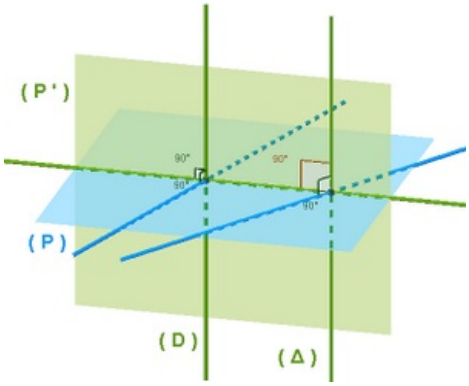


5-3/ Orthogonalité de deux plans

Définition

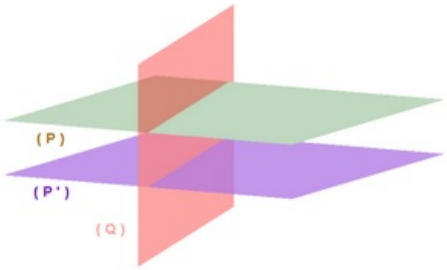
Deux plans (P) et (P') de l'espace $(\mathscr{E})$ sont orthogonaux si et seulement si l'un des deux plans contient une droite (D) orthogonale à l'autre plan.

On note : $(P) \perp (P')$



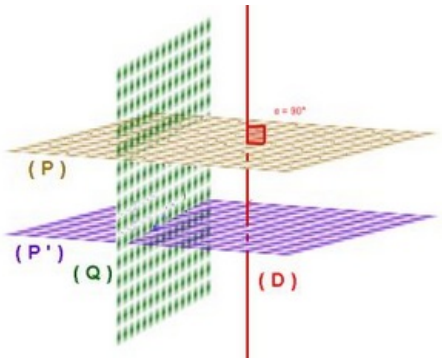
Propriétés

1- Si deux plans (P) et (P') de l'espace $(\mathscr{E})$ sont orthogonaux à une même droite, alors les plans sont parallèles.

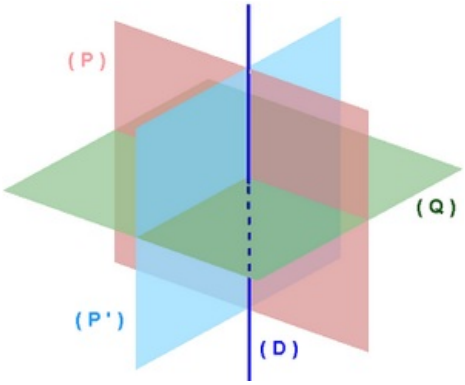


2- Si deux plans (P) et (P') de l'espace $(\mathscr{E})$ sont parallèles :

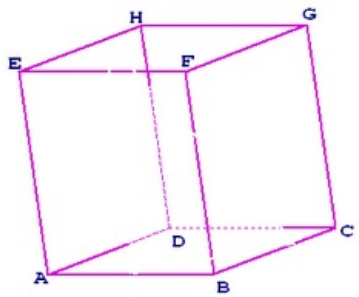
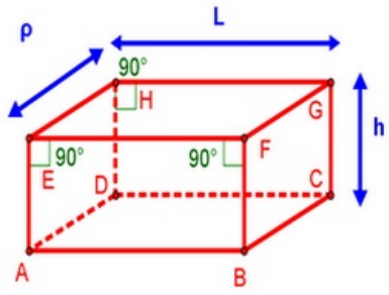
- Si un plan (Q) est orthogonal à l'un des deux plans, alors (Q) est orthogonal à l'autre.
- Si une droite (D) est orthogonale à l'un des deux plans, alors (D) est orthogonale à l'autre.



3- Pour tout plan (Q) orthogonal à deux plans sécants (P) et (P') suivant une droite (D), on a : $(D) \perp (Q)$.



VI- Surfaces et volumes de certains solides

Cube	Parallélépipède rectangle
	
Aire (surface) latérale : $S_L = 4a^2$	Aire (surface) latérale : $S_L = 2\,(L + l) \times h$

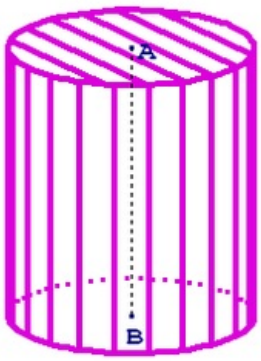
Aire (surface) totale : $S_T = 6a^2$

Volume : $V = a^3$

Aire (surface) totale : $S_T = S_L + 2L \times l$

Volume : $V = L \times l \times h$

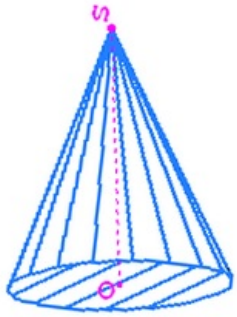
Cylindre droit



Aire (surface) latérale : $S_L = 2\pi \times \mathrm{R} \times \mathrm{h}$

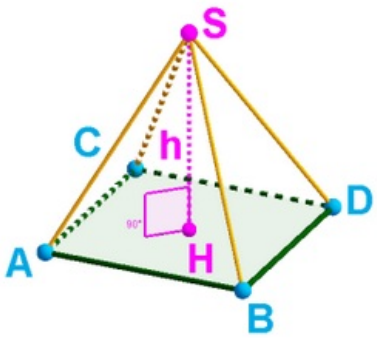
Volume : $V = \pi \times \mathrm{R}^2 \times \mathrm{h}$

Cône de révolution



Volume : $V = \frac{1}{3}\pi \times \mathrm{R}^2 \times \mathrm{h}$

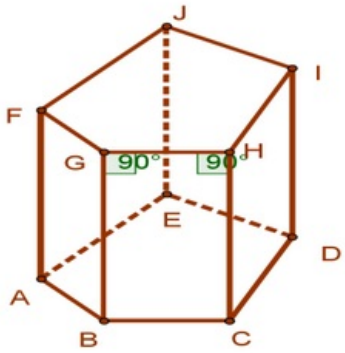
Pyramide



Surface de la base : S_H

Volume : $V = \frac{1}{3}S_H \times h$

Prisme droit



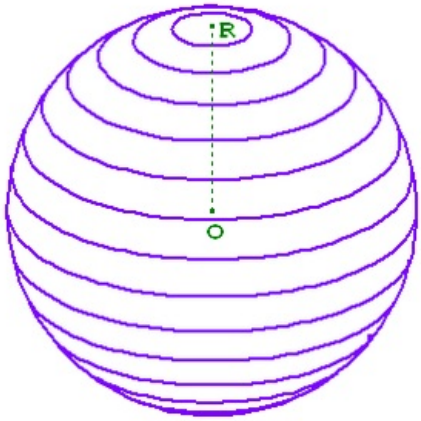
Périmètre de la base : P_B

Surface de la base : S_B

Aire (surface) latérale : $S_L = P_B \times h$

Volume : $V = S_B \times h$

Sphère



Rayon : R

Volume : $V = \frac{4}{3}\pi \times \mathrm{R}^3$

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

Dans un tétraèdre $ABCD$, I est un point de l'arête $[AB]$ et J est un point de l'arête $[CD]$.

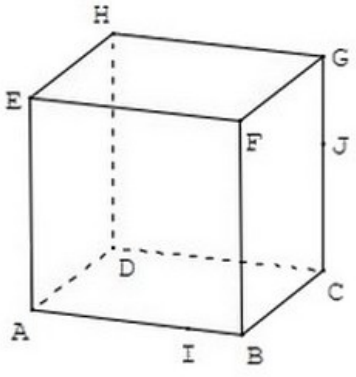
Le but de l'exercice est de trouver l'intersection des plans (AJB) et (CID).

1. Prouver que chacun des points I et J appartient à la fois aux plans (AJB) et (CID).
2. Quelle est alors l'intersection de ces deux plans.

7-2/ Exercice 2

On considère un cube $ABCDEFGH$, I est un point de l'arête $[AB]$ et J est un point de l'arête $[CG]$.

1. Montrer que les points I et J appartiennent à la fois aux plans (ABJ) et (CGI).
2. Quelle est l'intersection des plans (ABJ) et (CGI) ?



7-3/ Exercice 3

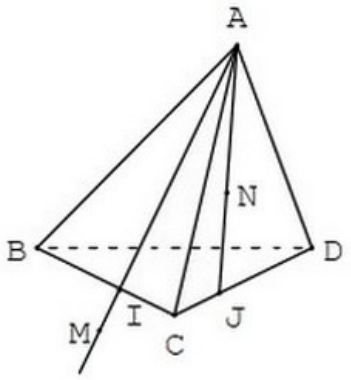
$ABCD$ est un tétraèdre, I est un point de l'arête $[BC]$ et J un point de l'arête $[CD]$.

N est un point du segment $[AJ]$ et M un point de la demi-droite $[AI)$ extérieur au segment $[AI]$.

1. Quelle est l'intersection des plans (AIJ) et (BCD) ?
2. Démontrer que les points M, N, I et J sont dans un même plan.

On note P le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (BCD).

3. Prouver que P est sur (IJ).



7-4/ Exercice 4

$ABCDEFGH$ est un cube, I est le milieu de $[AB]$.

On se propose de représenter la droite (Δ) d'intersection des plans (DIF) et (EFG).

1. Pourquoi F appartient-il à (Δ) ?
2. Quelle est l'intersection des plans (DIF) et (ABC) ?
3. Que sait-on sur les plans (ABC) et (EFG) ? En déduire la droite (Δ).

