Mathématiques : Tronc Commun

Séance 14 (Géométrie dans l'espace)

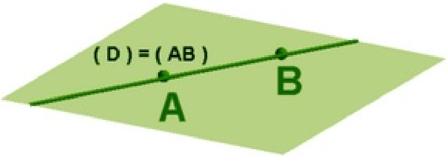
Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Les axiomes de l’espace

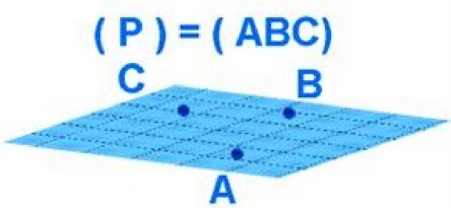
Axiome 1

Par deux points distincts A et B de l'espace $(\mathscr{E})$ passe une et une seule droite notée (AB).



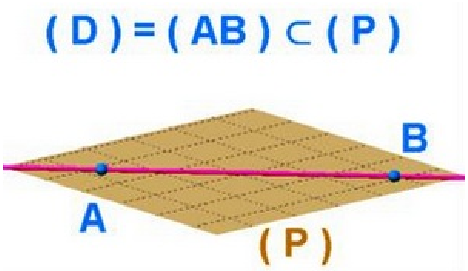
Axiome 2

Par trois points non alignés de l'espace $(\mathscr{E})$ passe un plan et un seul noté (ABC).



Axiome 3

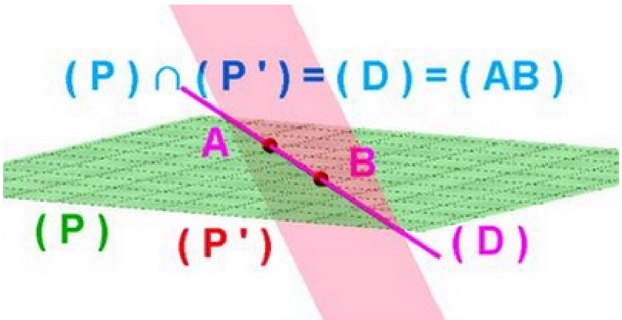
Si A et B sont deux points distincts d'un plan (P) de l'espace $(\mathscr{E})$, alors la droite (AB) est incluse dans le plan (P).



Axiome 4

(P) et (P') sont deux plans distincts de l'espace $(\mathscr{E})$.

Si un point A est commun aux deux plans, alors les deux plans se coupent suivant une droite passant par le point A.



II- Détermination d'un plan

Toutes les propriétés de la géométrie plane reste valables à chaque plan (P) de l'espace $(\mathscr{E})$.

Un plan (P) est déterminé soit par :

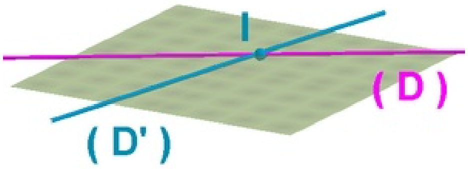
1. Une droite (D) et un point qui n'appartienne pas à cette droite $(A \notin (D))$.
2. Trois points A et B et C non alignés de l'espace $(\mathscr{E})$.

3. Deux droites (D) et (D') sécantes de l'espace $(\mathscr{E})$.
4. Deux droites (D) et (D') strictement parallèles de l'espace $(\mathscr{E})$.

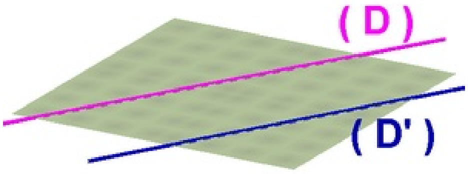
III- Positions relatives dans l'espace

3-1/ Positions relatives de deux droites

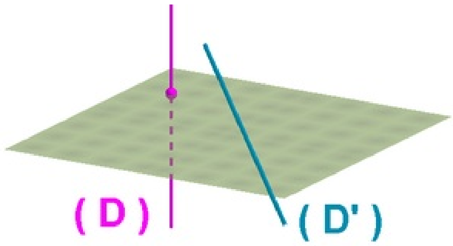
Cas 1 : (D) et (D') sont sécantes au point I : $((D) \cap (D') = \{I\})$



Cas 2 : (D) et (D') sont parallèles : $(D) // (D')$

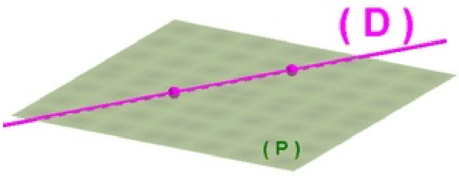


Cas 3 : (D) et (D') sont non coplanaires : $(D) \cap (D') = \emptyset$



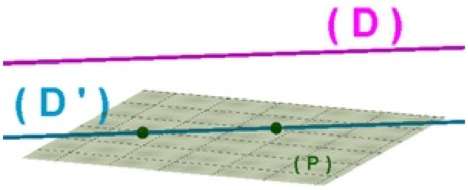
3-2/ Positions relatives d'une droite et d'un plan

Cas 1 : (D) est incluse dans le plan (P) : $(D) \subset (P)$



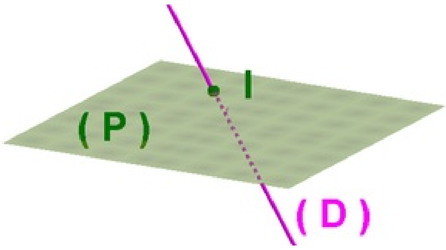
$$(D) \cap (P) = (D)$$

Cas 2 : (D) et (P) sont strictement parallèles : $(D) // (P)$



$$(D) \cap (P) = \emptyset$$

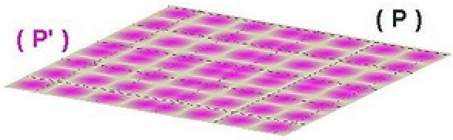
Cas 3 : (D) coupe le plan (P) au point I



$$(D) \cap (P) = \{I\}$$

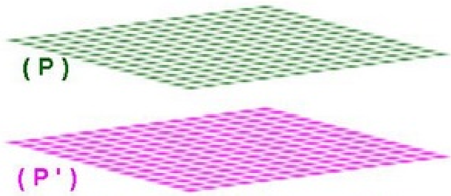
3-3/ Positions relatives de deux plans

Cas 1 : (P) **et** (P') **sont confondus :** $(P) = (P')$



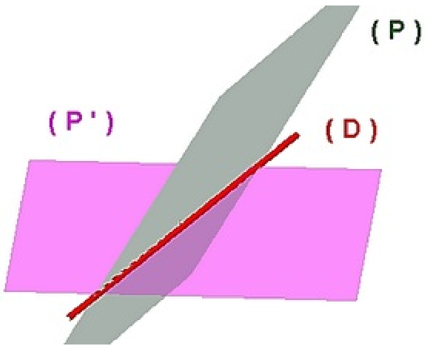
$$(P) \cap (P') = (P)$$

Cas 2 : (P) **et** (P') **sont strictement parallèles :** $(P)//(P')$



$$(P) \cap (P') = \emptyset$$

Cas 3 :(P) **et** (P') **sont sécants suivant une droite** (D)



$$(P) \cap (P') = (D)$$

IV- Parallélisme dans l'espace

4-1/ Parallélisme de deux droites

Définition

Deux droites (D) et (D') de l'espace sont parallèles si et seulement si :

- (D) et (D') sont coplanaires disjointes.

Ou

- (D) et (D') sont confondues.

On note $(D)//(D')$

Propriétés

1- D'un point O de l'espace passe une et une seule droite (Δ) parallèle a une droite (D) donnée de l'espace.

2- Soient (D), (D') et (Δ) trois droites de l'espace $(\mathscr{E})$.

- Si (D) et (D') sont parallèles et une droite (Δ) est parallèle à l'une des deux droites, alors (Δ) est parallèle à l'autre droite :

$$\begin{cases} (D)//(D') \\ (\Delta)//(D) \end{cases} \Rightarrow (\Delta)//(D')$$

- Si une droite (Δ) est parallèle à chacune des droites (D) et (D'), alors (D) et (D') sont parallèles :

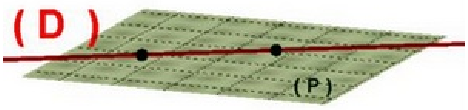
$$\begin{cases} (\Delta)//(D') \\ (\Delta)//(D) \end{cases} \Rightarrow (D)//(D')$$

4-2/ Parallélisme d'une droite et un plan

Définition

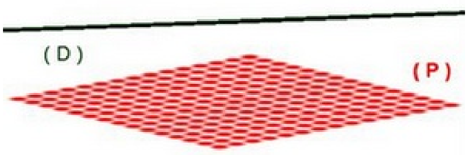
Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si :

- La droite (D) est un incluse dans le plan (P) : $(D) \subset (P)$



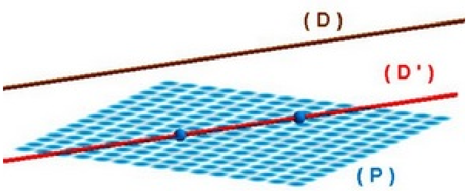
Ou

- (D) et (P) sont disjoints : $(D) \cap (P') = \emptyset$



Propriété

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si : il existe une droite (D') incluse dans le plan (P) tel que (D) et (D') sont parallèles.



4-3/ Parallélisme de deux plans

Définition

Deux plans (P) et (P') sont parallèles si et seulement si :

- (P) et (P') sont confondus : $(P) = (P')$

Ou

- (P) et (P') sont disjoints : $(P) \cap (P') = \emptyset$

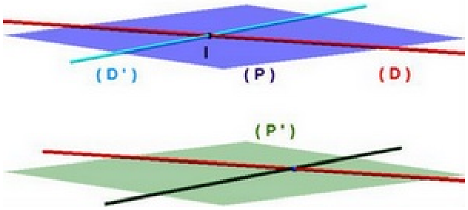
Propriétés

1- D'un point O de l'espace passe un et un seul plan (P') parallèle a un plan (P) donné de l'espace.

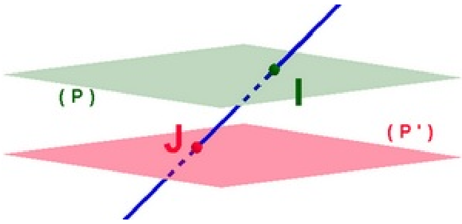
2- Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, alors tout plan (Q) parallèle à l'un des deux plans est parallèle à l'autre plan.

3- Si un plan (Q) est parallèle à chacun des plans (P) et (P'), alors les deux plans (P) et (P') sont parallèles.

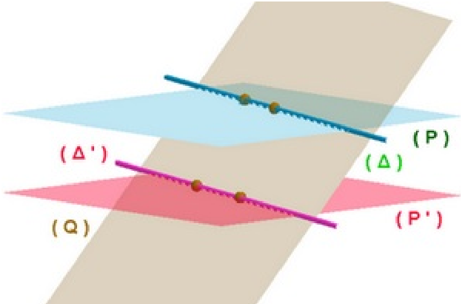
4- Deux plans (P) et (P') sont parallèles si et seulement si l'un d'eux contient deux droites sécantes (D) et (D') parallèles au deuxième plan :



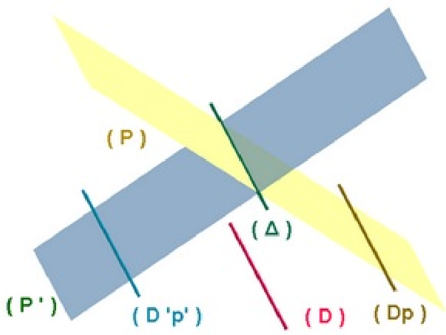
1- Si deux plans(P) et (P') sont parallèles, alors toute droite (D) qui coupe l'un des deux plans coupe l'autre plan :



2- Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, alors tout plan (Q) qui coupe l'un des deux plans suivant une droite $(\varDelta)$ coupe l'autre plan suivant une droite $(\varDelta')$ et les droites sont parallèles :



3- Si une droite (D) est strictement parallèle à deux plans sécants (P) et (P') suivant une droite $(\varDelta)$, alors les deux droites (D) et $(\varDelta)$ sont parallèles :



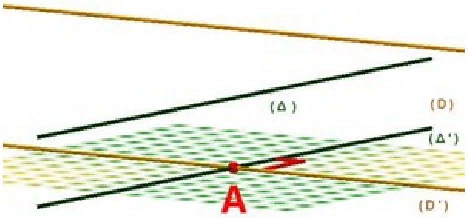
V- Orthogonalité dans l'espace

5-1/ Orthogonalité de deux droites

Définition

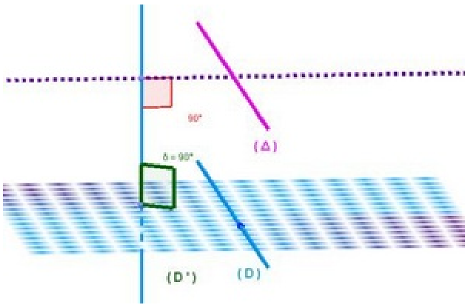
(D) et (Δ) deux droites sont orthogonales si et seulement si deux droites (D') et (Δ') sont sécantes à un point A de l'espace et orthogonales tel que $(D)//(D')$ et $(\Delta)//(\Delta')$.

On note : $(\Delta) \perp (D)$.

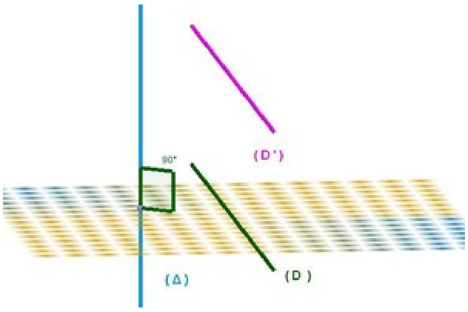


Propriétés

Si deux droites (D) et (D') sont orthogonales, alors toute droite (Δ) parallèle à l'une de ces deux droites est orthogonale à l'autre droite.



Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, alors toute droite (Δ) orthogonale à l'une des deux droites est orthogonale à l'autre droite.

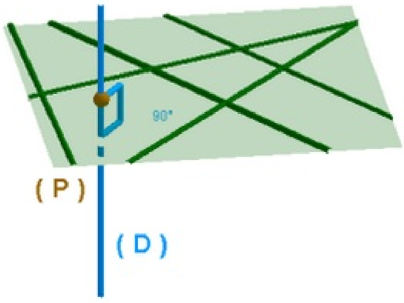


5-2/ Orthogonalité d'une droite et un plan

Définition

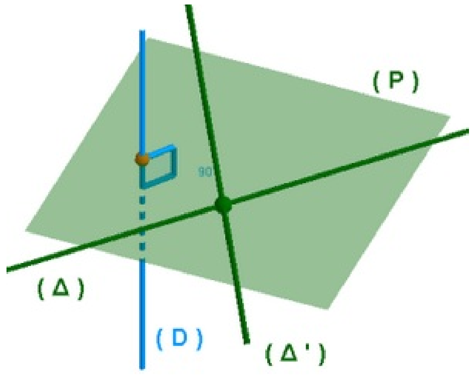
Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) de l'espace si et seulement si la droite (D) est orthogonale à toute droite (Δ) du plan (P).

On note : $(D) \perp (P)$, et on lit : (D) est orthogonale au plan (P).

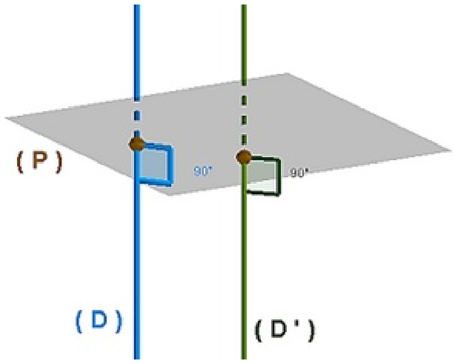


Propriétés

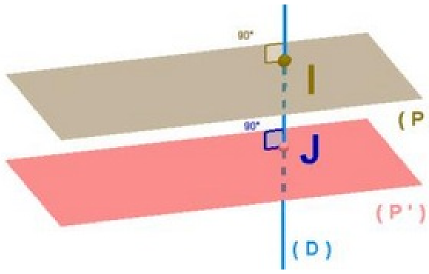
1- Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) de l'espace si et seulement si la droite (D) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (P).



2- Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, alors tout plan (P) orthogonal à l'une de ces deux droites est orthogonal à l'autre droite.



3- Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, alors toute droite (D) orthogonale à l'un des deux plans est orthogonale à l'autre plan.

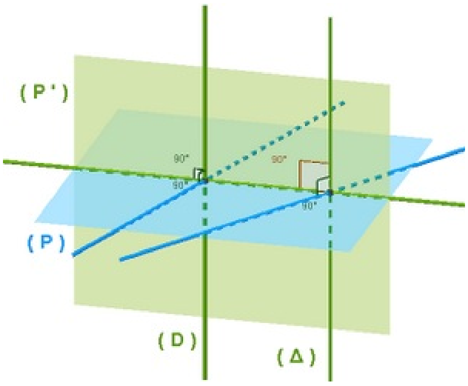


5-3/ Orthogonalité de deux plans

Définition

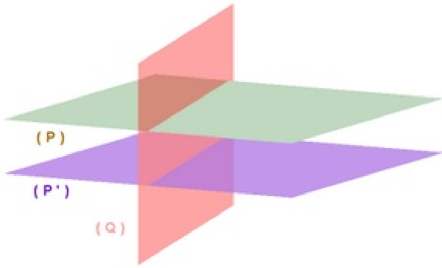
Deux plans (P) et (P') de l'espace $(\mathscr{E})$ sont orthogonaux si et seulement si l'un des deux plans contient une droite (D) orthogonale à l'autre plan.

On note : $(P) \perp (P')$



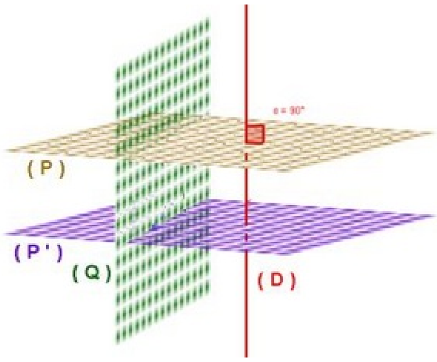
Propriétés

1- Si deux plans (P) et (P') de l'espace $(\mathscr{E})$ sont orthogonaux à une même droite, alors les plans sont parallèles.

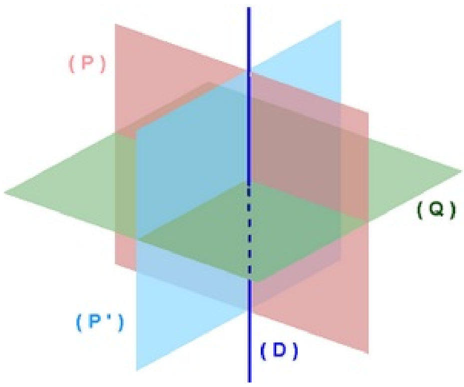


2- Si deux plans (P) et (P') de l'espace $(\mathscr{E})$ sont parallèles :

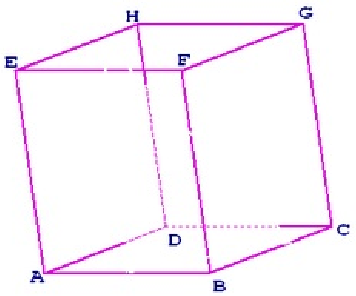
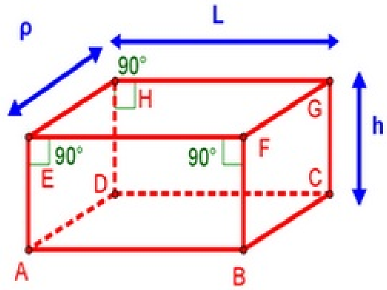
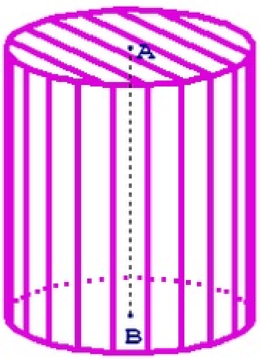
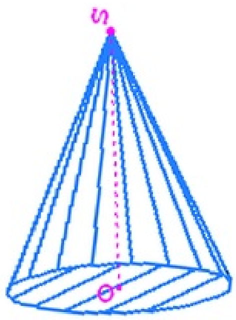
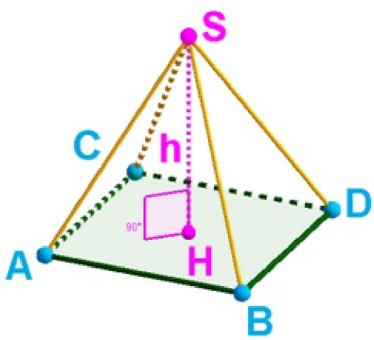
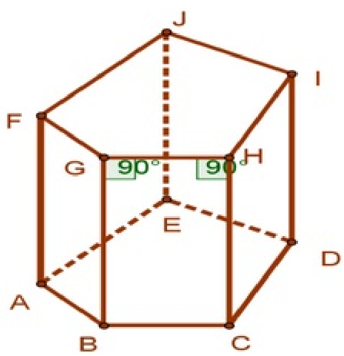
- Si un plan (Q) est orthogonal à l'un des deux plans, alors (Q) est orthogonal à l'autre.
- Si une droite (D) est orthogonale à l'un des deux plans, alors (D) est orthogonale à l'autre.



3- Pour tout plan (Q) orthogonal à deux plans sécants (P) et (P') suivant une droite (D), on a : $(D) \perp (Q)$.

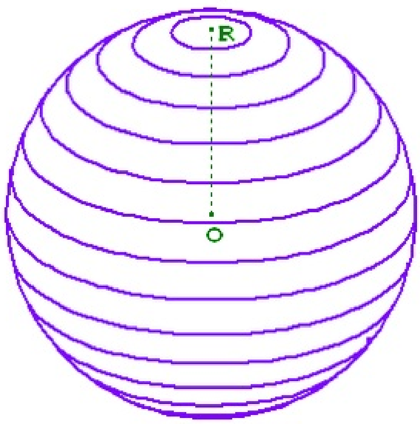


VI- Surfaces et volumes de certains solides

Cube	Parallélépipède rectangle
	
Aire (surface) latérale : $S_L = 4a^2$ Aire (surface) totale : $S_T = 6a^2$ Volume : $V = a^3$	Aire (surface) latérale : $S_L = 2\,(L + l) \times h$ Aire (surface) totale : $S_T = S_L + 2L \times l$ Volume : $V = L \times l \times h$
Cylindre droit	**Cône de révolution**
	
Aire (surface) latérale : $S_L = 2\pi \times \mathrm{R} \times \mathrm{h}$ Volume : $V = \pi \times \mathrm{R}^2 \times \mathrm{h}$	Volume : $V = \frac{1}{3}\pi \times \mathrm{R}^2 \times \mathrm{h}$
Pyramide	**Prisme droit**
	

Surface de la base : S_H Volume : $V = \frac{1}{3} S_H \times h$	Périmètre de la base : P_B Surface de la base : S_B Aire (surface) latérale : $S_L = P_B \times h$ Volume : $V = S_B \times h$

Sphère



Rayon : R

Volume : $V = \frac{4}{3}\pi \times \mathrm{R}^3$

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

Dans un tétraèdre $ABCD$, I est un point de l'arête $[AB]$ et J est un point de l'arête $[CD]$.

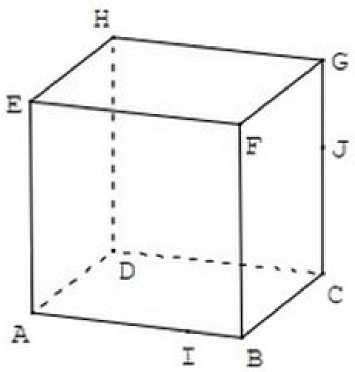
Le but de l'exercice est de trouver l'intersection des plans (AJB) et (CID).

1. Prouver que chacun des points I et J appartient à la fois aux plans (AJB) et (CID).
2. Quelle est alors l'intersection de ces deux plans.

7-2/ Exercice 2

On considère un cube $ABCDEFGH$, I est un point de l'arête $[AB]$ et J est un point de l'arête $[CG]$.

1. Montrer que les points I et J appartiennent à la fois aux plans (ABJ) et (CGI).
2. Quelle est l'intersection des plans (ABJ) et (CGI) ?



7-3/ Exercice 3

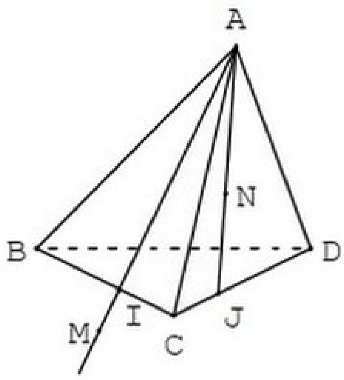
$ABCD$ est un tétraèdre, I est un point de l'arête $[BC]$ et J un point de l'arête $[CD]$.

N est un point du segment $[AJ]$ et M un point de la demi-droite $[AI)$ extérieur au segment $[AI]$.

1. Quelle est l'intersection des plans (AIJ) et (BCD) ?
2. Démontrer que les points M, N, I et J sont dans un même plan.

On note P le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (BCD).

3. Prouver que P est sur (IJ).

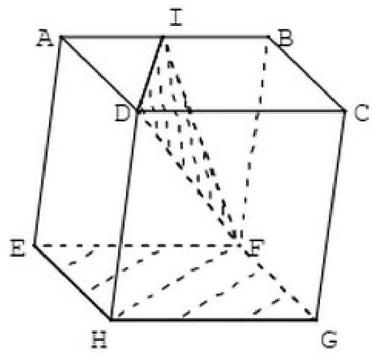


7-4/ Exercice 4

$ABCDEFGH$ est un cube, I est le milieu de $[AB]$.

On se propose de représenter la droite (Δ) d'intersection des plans (DIF) et (EFG).

1. Pourquoi F appartient-il à (Δ) ?
2. Quelle est l'intersection des plans (DIF) et (ABC) ?
3. Que sait-on sur les plans (ABC) et (EFG) ? En déduire la droite (Δ).


A
I
B
D
C
E
F
H
G