Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Examen National 2021 Session Normale

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Exercice 1 : Analyse (12 pts)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$$

Soit $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (On prendra $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1cm$).

Partie 1

1. a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - nx + 2)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
1. b- Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_n)$ admet en $-\infty$ une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation cartésienne.
2. a- Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R})\ f_n'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$.
2. b- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ f_n'(x) = \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$.
2. c- En déduire le sens de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ (On distinguera les deux cas $n = 0$ et $n \geq 1$).
3. a- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_n)$ au point I d'abscisse 0.
3. b- Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_n)$.
4. Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes $(\mathscr{C}_0)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

Pour tout réel $t > 0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par $(\mathscr{C}_n)$ et les droites d'équations respectives : $y = nx - 2$, $x = 0$ et $x = t$.

5. a- Calculer $A(t)$ pour tout$t > 0$.
5. b- Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.

Partie 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f_0\left(u_n\right) \end{cases}$$

1. a- Montrer que l'équation $f_0\left(x\right) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
1. b- Montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\ \left|f_0\text{'}\left(x\right)\right| \leq \frac{1}{2}$
2. a- Montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\ \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha\right|$
2. b- En déduire que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\ \left|u_n - \alpha\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\alpha\right|$.
2. c- Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Partie 3

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$.

1. a- Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n\left(x\right) = 0$.
1. b- Montrer que pour tout entier $n \geq 2 : 0 < x_n < 1$ (On prendra $\frac{2e}{1+e} < 1,47$).
2. a- Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $f_{n+1}\left(x_n\right) > 0$.
2. b- En déduire que la suite $\left(x_n\right)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.
2. c- Montrer que la suite $\left(x_n\right)_{n\geq 2}$ est convergente.
3. a- Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$
3. b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$.
4. a- Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $x_n \leq x_2$
4. b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(x_n\right)^n$.

Exercice 2 : Nombres complexes (4 pts)

Soient a, b et c trois nombres complexes non nuis tel que $a + b \neq c$.

1. a- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E)\ :\ z^2 - (a+b+c)z + c\left(a+b\right) = 0$$

1. b- Écrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle (On suppose dans cette question que $a = i$, $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c = a — b$).

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On considère les trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ qu'on suppose non alignés. Soient $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A, et $Q(q)$ le centre de la rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A, et $D\{d)$ le milieu du segment $[BC]$.

2. a- Montrer que $2p = b + a + (a-b)i$ et $2q = c + a + (c-a)i$.
2. b- Calculer $\frac{p-d}{q-d}$.

2. c- En déduire la nature du triangle PDQ.

Soient E le symétrique de B par rapport à P, et F le symétrique de C par rapport à Q, et K le milieu du segment $[EF]$.

3. a- Montrer que l'affixe de K est $k = a + \frac{i}{2}(c - b)$

3. b- Montrer que les points K, P, Q et D sont cocycliques.

Exercice 3 : Arithmétique (4 pts)

Partie 1

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ :\ 47x - 43y\ = 1$.

1. Vérifier que le couple $(11, 12)$ est une solution particulière de l'équation (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

Partie 2

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F)\ :\ x^{41} \equiv 4\ [43]$.

Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F).

1. a- Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire que $x^{42} \equiv 1\ [43]$.

1. b- Montrer que $4x \equiv 1\ [43]$, en déduire que $x \equiv 11\ [43]$.

2. Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F).

Partie 3

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant

$$(S)\ :\ \begin{cases} x^{41} \equiv 4\ [43] \\ x^{47} \equiv 10\ [47] \end{cases}.$$

Soit x une solution du système (S).

1. a- Montrer que x est solution du système $(S')\ :\ \begin{cases} x \equiv 11\ [43] \\ x \equiv 10\ [47] \end{cases}$.

1. b- En déduire que $x \equiv 527\ [2021]$ (On pourra utiliser la partie 1).

2. Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S).