

I- Exercice 1

On rappelle que $(\mathbb{C}; +; \times)$ est un corps commutatif, que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre.

On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; M(x; y) = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} ((x; y) \in \mathbb{R}^2)$$
$$E = \{M(x; y) / (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$, de dimension 2
2. Montrer que E est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$.
3. Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

On pose $E^* = E - \{M(0, 0)\}$, et on considère l'application φ de \mathbb{C}^* vers E^* définie par :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2; \varphi(x + iy) = M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

4. Montrer que φ est un isomorphisme de (\mathbb{C}^*, \times) sur (E^*, \times) .
5. En déduire que (E^*, \times) est un groupe commutatif.
6. Montrer que $J^{2017} = \varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}i\right)$, puis déterminer l'inverse de la matrice J^{2017} dans (E^*, \times) .
7. Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

II- Exercice 2

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(D) : 7x^3 - 13y = 5$

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (D)

1. Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.
2. En déduire que $x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.
3. Montrer que $x^3 \equiv 10 \pmod{13}$.
4. En déduire que $x^{12} \equiv 3 \pmod{13}$.
5. Déduire des questions précédentes, que l'équation (D) n'admet pas de

solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

III- Exercice 3

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Soit E l'ensemble des fonctions f définie sur \mathbb{R} par :

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

1. Montrer que $(E, +, \bullet)$ est un espace vectoriel réel.

Soit \mathcal{A} l'ensemble des fonctions affines définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

2. Montrer que $\mathcal{A} \subset E$ et que $(\mathcal{A}, +, \bullet)$ est un espace vectoriel réel.

Partie B

Pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$(\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) f_{(\alpha; \beta)}(x) = \alpha e^x \cos(ax) + \beta e^x \sin(bx)$$

On considère l'ensemble suivant :

$$E_{(a; b)} = \{ f_{(\alpha; \beta)} / (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \}$$

1. Montrer que $(E_{(a; b)}, +, \bullet)$ est un espace vectoriel réel.
2. Déterminer selon les valeurs des réels a et b , la dimension de l'espace vectoriel $E_{(a; b)}$.

Partie C

Dans cette partie, $(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*), +, \bullet)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur \mathbb{R}_+^* .

Pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f_{(a; b)}(x) = x^a e^{bx} \text{ et } \varphi_{(a; b)}(x) = \ln(f_{(a; b)}(x))$$

On considère l'ensemble : $\mathcal{L} = \{ \varphi_{(a; b)} / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \}$

1. Montrer que $(\mathcal{L}; +)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*), +)$
2. Vérifier que pour tout $\varphi_{(a; b)} \in \mathcal{L}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \bullet \varphi_{(a; b)} \in \mathcal{L}$
3. En déduire que $(\mathcal{L}, +, \bullet)$ est un espace vectoriel réel.
4. Montrer que $(\varphi_{(1; 0)}; \varphi_{(0; 1)})$ est une base de l'espace vectoriel \mathcal{L} , puis déterminer sa dimension.