

## I- Exercice 1

On rappelle que  $(\mathbb{C}; +; \times)$  est un corps commutatif, que  $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$  est un espace vectoriel réel et que  $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$  est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre.

On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; M(x; y) = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} ((x; y) \in \mathbb{R}^2)$$

$$E = \{M(x; y) / (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Montrer que  $E$  est un sous espace vectoriel de  $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$ , de dimension 2
2. Montrer que  $E$  est stable dans  $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$ .
3. Montrer que  $(E, +, \times)$  est un anneau unitaire et commutatif.

On pose  $E^* = E - \{M(0, 0)\}$ , et on considère l'application  $\varphi$  de  $\mathbb{C}^*$  vers  $E^*$  définie par :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2; \varphi(x + iy) = M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

4. Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  sur  $(E^*, \times)$ .
5. En déduire que  $(E^*, \times)$  est un groupe commutatif.
6. Montrer que  $J^{2017} = \varphi(3^{1008}\sqrt{3}i)$ , puis déterminer l'inverse de la matrice  $J^{2017}$  dans  $(E^*, \times)$ .
7. Montrer que  $(E, +, \times)$  est un corps commutatif.

## II- Exercice 2

On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $(D)$  :  $7x^3 - 13y = 5$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  une solution de l'équation  $(D)$

1. Montrer que  $x$  et 13 sont premiers entre eux.
2. En déduire que  $x^{12} \equiv 1 [13]$ .
3. Montrer que  $x^3 \equiv 10 [13]$ .
4. En déduire que  $x^{12} \equiv 3 [13]$ .
5. Déduire des questions précédentes, que l'équation  $(D)$  n'admet pas de

solution dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

### III- Exercice 3

Les parties A, B et C sont indépendantes.

#### Partie A

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \quad f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

1. Montrer que  $(E, +, \bullet)$  est un espace vectoriel réel.

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des fonctions affines définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que  $\mathcal{A} \subset E$  et que  $(\mathcal{A}, +, \bullet)$  est un espace vectoriel réel.

#### Partie B

Pour tout  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ , on pose :

$$(\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) \quad f_{(\alpha; \beta)}(x) = \alpha e^x \cos(ax) + \beta e^x \sin(bx)$$

On considère l'ensemble suivant :

$$E_{(a; b)} = \{ f_{(\alpha; \beta)} / (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \}$$

1. Montrer que  $(E_{(a; b)}, +, \bullet)$  est un espace vectoriel réel.
2. Déterminer selon les valeurs des réels  $a$  et  $b$ , la dimension de l'espace vectoriel  $E_{(a; b)}$ .

#### Partie C

Dans cette partie,  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*), +, \bullet)$  désigne l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose :

$$f_{(a; b)}(x) = x^a e^{bx} \quad \text{et} \quad \varphi_{(a; b)}(x) = \ln(f_{(a; b)}(x))$$

On considère l'ensemble :  $\mathcal{L} = \{ \varphi_{(a; b)} / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \}$

1. Montrer que  $(\mathcal{L}; +)$  est un sous-groupe du groupe  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*), +)$
2. Vérifier que pour tout  $\varphi_{(a; b)} \in \mathcal{L}$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :  $\lambda \bullet \varphi_{(a; b)} \in \mathcal{L}$
3. En déduire que  $(\mathcal{L}, +, \bullet)$  est un espace vectoriel réel.
4. Montrer que  $(\varphi_{(1; 0)}; \varphi_{(0; 1)})$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}$ , puis déterminer sa dimension.