



Mathématiques : Tronc Commun

Séance 13 (Le produit scalaire)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Produit scalaire de deux vecteurs

1-1/ Norme d'un vecteur

1-2/ Produit scalaire de deux vecteurs

II- Forme trigonométrique du produit scalaire de deux vecteurs non nuls

III- Orthogonalité de deux vecteurs

IV- Propriétés du produit scalaire

V- Applications du produit scalaire

5-1/ Relations métriques dans un triangle rectangle

5-2/ Théorème d'El Kashi

5-3/ Théorème de la médiane

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

I- Produit scalaire de deux vecteurs

1-1/ Norme d'un vecteur

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan (P) .

A et B deux points de (P) tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

La distance entre A et B est notée par AB ou encore $|\overrightarrow{AB}|$. On lit la norme du vecteur $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$.

Donc $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

1-2/ Produit scalaire de deux vecteurs

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

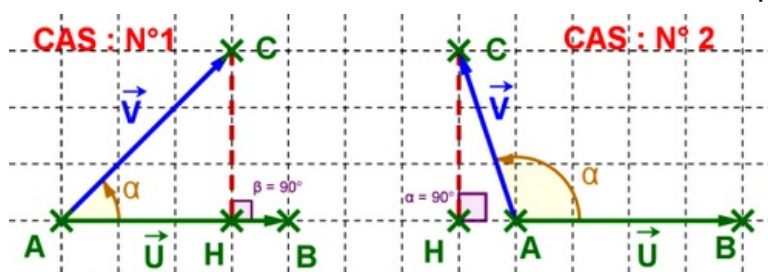
le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ tel que :

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ($A \neq B$ car $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$), alors

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens (Cas n°1).

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens opposés (Cas n°2).



Remarques

La projection orthogonale de B sur la droite (AB) est B , d'où

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = AB^2 > 0$, on note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$ ou par $\overrightarrow{u}^2$, et on lit le carré scalaire.

$\overrightarrow{u}^2$ est un nombre positif de même que $\overrightarrow{AB}^2$ est un nombre positif.

On a $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2$, d'où $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$, et de même on a

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{\overrightarrow{u}^2}$$

II- Forme trigonométrique du produit scalaire de deux vecteurs non nuls

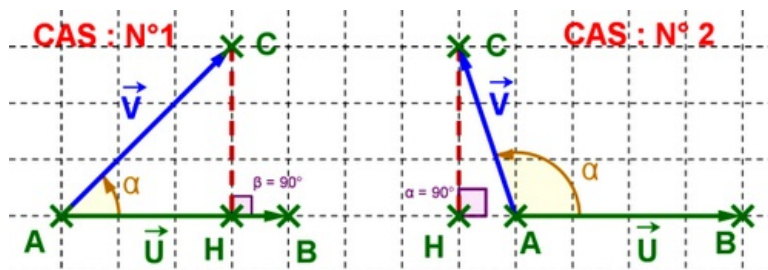
Activité

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

H est la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ($A \neq B$ car $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$),

On considère l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ de mesure $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \alpha [2\pi]$

1. Pour chaque cas exprimer AH en fonction de AC et $\cos \alpha$.



Propriété

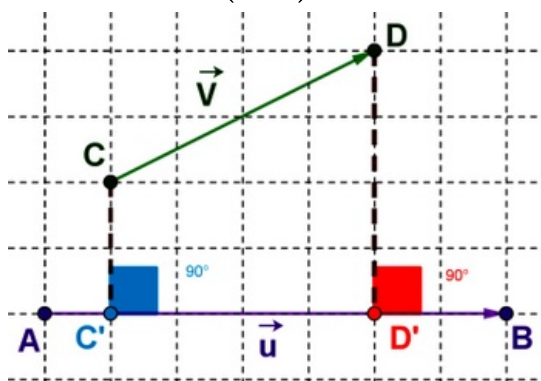
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \alpha [2\pi]$

La forme trigonométrique du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \alpha, \text{ ou encore } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$$

Remarque

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est le nombre réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$ tel que C' et D' sont respectivement les projections orthogonales de C et D sur la droite (AB) :



III- Orthogonalité de deux vecteurs

Activité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

1. Donner la forme trigonométrique de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. Donner la condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonales.

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

IV- Propriétés du produit scalaire

Propriétés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan (P)

On a :

1. Linéarité du produit scalaire :

$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} \\ (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$$

2. Positivité du produit scalaire :

$$\vec{u}^2 \geq 0$$

3. produit scalaire est non dégénéré :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

Conséquences

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan (P)

On a :

$$\begin{aligned} 1 \quad (\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ 2 \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ 3 \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \\ 4 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right] \end{aligned}$$

V- Applications du produit scalaire

5-1/ Relations métriques dans un triangle rectangle

Activité

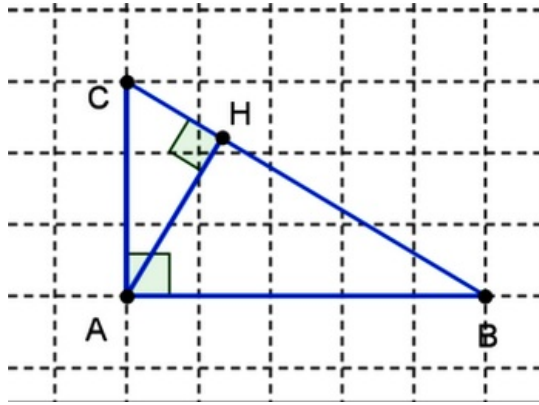
ABC est un triangle rectangle en A .

Le point H est la projection orthogonale de A sur la droite (BC) .

1. Calculer $\cos B$ en utilisant les deux triangles ABC et ABH .
2. Montrer que $BA^2 = BH \times BC$.
3. Montrer que $AH^2 = AB^2 - HB^2$, et que $AH^2 = AC^2 - HC^2$.
4. En déduire que $2AH^2 = BC^2 - (HB^2 + HC^2)$.

On remarque que $(HB + HC)^2 - 2HB \times HC = BC^2 - 2HB \times HC$.

5. En déduire que $AH^2 = HB \times HC$.



Propriété

ABC est un triangle rectangle en A .

Le point H est la projection orthogonale de A sur la droite (BC) .

On a :

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

$$BA^2 = BH \times BC$$

$$CA^2 = CH \times CB$$

$$AH^2 = HB \times HC$$

On les appelle les relations métriques dans un triangle rectangle.

5-2/ Théorème d'El Kashi

Théorème

Dans tout triangle ABC , on pose $AB = c$ et $AC = b$ et $BC = a$.

On a :

$$1- BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A \text{ ou encore } a^2 = c^2 + b^2 - 2c \times b \times \cos A$$

$$2- AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos B \text{ ou encore } b^2 = c^2 + a^2 - 2c \times a \times \cos B$$

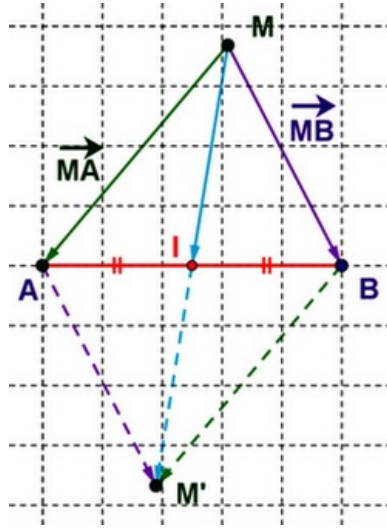
$$3- AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \times CB \times \cos C \text{ ou encore } c^2 = b^2 + a^2 - 2b \times a \times \cos C$$

5-3/ Théorème de la médiane

Soit un segment $[AB]$ du plan (P) , le point I est son milieu.

Pour tout point M du plan (P) , on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans les deux cas suivants :

$$1 \quad \|\vec{u}\| = 1 ; \|\vec{v}\| = \sqrt{3} ; \overline{(\vec{u} \cdot \vec{v})} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$2 \quad \|\vec{u}\| = 2 ; \|\vec{v}\| = \frac{2}{\sqrt{2}} ; \overline{(\vec{u} \cdot \vec{v})} \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi]$$

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 4$.

2. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

3. Déterminer les mesures possibles de l'angle orienté $\overline{(\vec{u} \cdot \vec{v})}$ sachant que

$$\|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = \sqrt{2} \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = -2\sqrt{6}.$$

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = 3$ et $BC = 3\sqrt{3}$.

4. Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

6. En déduire $\widehat{CAB}$.

6-2/ Exercice 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux du plan tels que $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

1. Déterminer le réel m sachant que

$$(m\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 13. \cos(\hat{A}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Soit ABC un triangle tel que $AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$ et $\cos(\hat{A}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Considérons D un point du plan défini par $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right)$.

3. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

6-3/ Exercice 3

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ et $AD = 4$ et $CD = 6$.

Soit O le milieu du segment $[AB]$.

1. Calculer les distances BD et AC .
 2. Montrer que pour tout point M du plan, on a $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 18$.
 3. En déduire l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MB^2 = 24$.
- Soient ABC un triangle rectangle en A , et H le projeté orthogonal de A sur (BC) et $AB = 3$ et $AC = 4$.
4. Calculer les longueurs BC , HC , HB et AH .

6-4/ Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$ et $AC = 1$ et $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{3}$.

1. Vérifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1$.
2. Calculer la distance BC .

Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$.

3. Calculer AI et BJ .

Soit E un point du plan tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$.