

Sommaire

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

4-2/ Exercice 2

4-3/ Exercice 3

4-4/ Exercice 4

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

On munit $\mathbb{R}_+^*$ d'une loi de composition interne $\times$ et d'une loi de composition externe $\bullet$ comme suit :

- La loi $\times$ est la multiplication usuelle dans $\mathbb{R}_+^*$.
- $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \lambda \bullet x = x^\lambda$

1. $(\mathbb{R}_+^*; \times; \bullet)$ est-il un espace vectoriel réel ?

4-2/ Exercice 2

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} / (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $J^2 = K$ et $K^2 = J + K$ et $JK = KJ = I + J$.
2. Montrer que $(E; +; \bullet)$ est un espace vectoriel réel, et déterminer sa dimension.
3. Montrer que $(E; +; \times)$ est un anneau commutatif.
4. Déterminer J^{-1} .

4-3/ Exercice 3

Partie A

On définit dans $\mathbb{C}$ une loi de composition interne $*$ comme suit :

$$\text{Pour tout } (a; b; x; y) \in \mathbb{R}^4, (a + ib) * (x + iy) = ax + i(ay + bx)$$

1. Montrer que la loi $*$ est commutative, associative et admettant un élément neutre qu'on déterminera.
2. Déterminer G , ensemble des éléments symétrisables pour la loi $*$ et montrer que $(G; *)$ est un groupe commutatif.

Soit H une partie de $\mathbb{C}$ telle que $H \neq \{0\}$.

3. Montrer que si $(H; *)$ est groupe alors $H \subset G$.
4. Montrer que l'ensemble E définie par $E = \{e^t + ite^t / t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $(G; *)$.
5. Montrer que $(\forall z \in G) \bar{z} \in G$
6. Montrer que l'application $f : z \mapsto \bar{z}$ est un automorphisme de $(G; *)$.
7. Montrer que $*$ est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$.
8. Montrer que $(\mathbb{C}; +; *)$ est un anneau non intègre.
9. Déterminer les diviseurs de zéro dans l'anneau $(\mathbb{C}; +; *)$.

Partie B

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ suivant :

$$\mathcal{E} = \left\{ M(a; b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1. Montrer que $(\mathcal{E}; +; \bullet)$ est un espace vectoriel réel et en déterminer une base.
2. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable dans $(M_2(\mathbb{R}); \times)$.
3. Montrer que l'application $f : z = a + ib \mapsto M(a; b)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}; *)$ dans $(\mathcal{E}; \times)$.
4. En déduire l'ensemble des matrices admettant un inverse dans $(\mathcal{E}; \times)$.

4-4/ Exercice 4

Partie A

On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne comme suit :

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) x * y = x + y - e^{xy} + 1$$

1. Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera.
3. Sachant que l'équation $(E) : 3 + x - e^{2x} = 0$ admet deux solutions réelles distinctes α et β , montrer que la loi $*$ n'est pas associative.

Partie B

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau non commutatif d'élément unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{C}^*; \times)$ est un groupe commutatif.

Pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $M(x; y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$

Soit : $F = \{M(x; y) / (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \bullet)$.
2. Montrer que F est une partie stable de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$.

On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ dans F est qui, à tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, associe la matrice $M(x; y)$.

3. Montrer que l'application φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*; \times)$ dans $(F; \times)$.

On pose : $F^* = F - \{M(0; 0)\}$

4. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$
5. Montrer que $(F^*; \times)$ est un groupe commutatif.
6. Montrer que $(F^*; +; \times)$ est un corps commutatif