AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 10-3 : Structures algébriques - Problème de synthèse

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

9-2/ Partie 2

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

Soit $E = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

Pour tout $(a;b) \in E^2$, on pose : $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

1)Vérifier que pour tout $(a;b) \in E^2$:

$$a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2} - 1\right)\left(b\sqrt{2} - 1\right)$$

2. En déduire que $\perp$ est une loi de composition interne dans E.
3. Montrer que $(E;\perp)$ est un groupe commutatif.

9-2/ Partie 2

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des matrices de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ qui s'écrivent sous la forme :

$$M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})$$

On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $A^2 = -2A$ et $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$.
2. Montrer que $\mathscr{F}$ est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$.

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : (E;\perp) &\to (\mathscr{F};\times) \\ a &\mapsto \varphi(a) = M(a) \end{aligned}$$

3. Montrer que φ est un isomorphisme.

4. En déduire la structure de $(\mathscr{F}; \times)$.