

Sommaire

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

9-2/ Partie 2

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

Soit $E = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

Pour tout $(a; b) \in E^2$, on pose : $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

1) Vérifier que pour tout $(a; b) \in E^2$:

$$a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} (a\sqrt{2} - 1) (b\sqrt{2} - 1)$$

2. En déduire que \perp est une loi de composition interne dans E .

3. Montrer que $(E; \perp)$ est un groupe commutatif.

9-2/ Partie 2

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit \mathcal{F} l'ensemble des matrices de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ qui s'écrivent sous la forme :

$$M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})$$

On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $A^2 = -2A$ et $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$.

2. Montrer que \mathcal{F} est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$.

On considère l'application :

$$\begin{aligned}\varphi : (E; \perp) &\rightarrow (\mathcal{F}; \times) \\ a &\mapsto \varphi(a) = M(a)\end{aligned}$$

3. Montrer que φ est un isomorphisme.
4. En déduire la structure de $(\mathcal{F}; \times)$.