

Sommaire

IIX- Exercices II

8-1/ Exercice 2-1

8-2/ Exercice 2-2

8-3/ Exercice 2-3

8-4/ Exercice 2-4

IIX- Exercices II

8-1/ Exercice 2-1

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{C}; +; \times)$ est un corps commutatif.

Pour tous a et b de $\mathbb{R}$, on pose : $M(a; b) = \begin{pmatrix} a & a - b \\ b & a + b \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble : $E = \{M(a; b) / (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +)$.
2. Calculer $J^2 = J \times J$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis en déduire que E n'est pas une partie stable de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$.

On définit sur l'ensemble $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ une loi de composition interne $*$ par

$$A * B = A \times N \times B \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et qui, à chaque nombre complexe non nul $a + ib$ (a et b deux réels), la matrice $M(a; b)$.

3. Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*; \times)$ dans $(E, *)$

On pose : $E^* = E - \{O\}$

4. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

- Montrer que $(E^*; *)$ est un groupe commutatif.
- Montrer que pour tout $(A; B; C) \in E^3 : A * (B + C) = A * B + A * C$
- En déduire de ce qui précède que $(E; +; *)$ est un corps commutatif.

8-2/ Exercice 2-2

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau non commutatif.

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

- Montrer que E est une partie stable de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); \times)$
- Montre que l'application φ qui, à tout réel x , associe la matrice $M(x)$ de E , est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(E; \times)$.
- En déduire que $(E; \times)$ est un groupe commutatif.
- Déterminer $(M(x))^{-1}$, la matrice inverse de $M(x)$
- Résoudre dans E l'équation $A^5 X = B$ où $A = M(2)$, $B = M(12)$ et $A^5 = A \times A \times A \times A \times A$
- Montrer que l'ensemble $F = \{M(\ln x) / x \in \mathbb{R}_+^*\}$ est un sous-groupe du groupe $(E; \times)$

8-3/ Exercice 2-3

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que

$(\mathbb{R}; +)$ est un groupe commutatif.

Soit a un réel strictement positif.

Soit E le sous-ensemble de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); +; \times)$ définie par :

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

- Montrer que E est stable dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); \times)$
- Montrer que l'application φ définie par $\varphi(x) = M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(E; \times)$.
- Montrer de deux façons différentes que $(E; \times)$ est un groupe commutatif.

8-4/ Exercice 2-4

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{R}; +)$ est un groupe commutatif.

Pour tout réel x , on pose : $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble : $E = \{M(x) / x \in \mathbb{R}\}$

On munit E d'une loi de composition interne T donnée par :

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) M(x)TM(y) = M(x + y + 1)$$

Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}$ dans E par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \varphi(x) = M(x - 1)$$

1. Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(E; T)$.
2. Montrer que $(E; T)$ est un groupe commutatif.
3. Montrer que pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$: $M(x) \times M(y) = M(x + y + xy)$
4. En déduire que E est stable dans $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$, et que la loi « $\times$ » est commutative dans E .
5. Montrer que la loi « $\times$ » est distributive par rapport à la loi « T » dans E .
6. Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans $(E; T)$, et que I est l'élément neutre dans $(E; \times)$.
7. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$: $M(x) \times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$
8. Montrer que $(E; T; \times)$ est un corps commutatif.