AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 10-2-2 : Structures algébriques - Partie 2 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IIX- Exercices II

8-1/ Exercice 2-1

8-2/ Exercice 2-2

8-3/ Exercice 2-3

8-4/ Exercice 2-4

IIX- Exercices II

8-1/ Exercice 2-1

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau de zéro $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif.

Pour tous a et b de $\mathbb{R}$, on pose : $M(a;b)=\begin{pmatrix}a&a-b\\b&a+b\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble : $E=\left\{M(a;b)/\,(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1. Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$.
2. Calculer $J^2=J\times J$ où $J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, puis en déduire que E n'est pas une partie stable de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

On définit sur l'ensemble $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ une loi de composition interne $*$ par $A*B=A\times N\times B$ avec $N=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et qui, à chaque nombre complexe non nul $a+ib$ (a et b deux réels), la matrice $M(a;b)$.

3. Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $(E,*)$

On pose : $E^*=E-\{O\}$

4. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

5. Montrer que $(E^*; *)$ est un groupe commutatif.
6. Montrer que pour tout $(A; B; C) \in E^3$: $A * (B + C) = A * B + A * C$
7. En déduire de ce qui précède que $(E; +; *)$ est un corps commutatif.

8-2/ Exercice 2-2

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau non commutatif.

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Montrer que E est une partie stable de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); \times)$
2. Montre que l'application φ qui, à tout réel x, associe la matrice $M(x)$ de E, est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(E; \times)$.
3. En déduire que $(E; \times)$ est un groupe commutatif.
4. Déterminer $(M(x))^{-1}$, la matrice inverse de $M(x)$
5. Résoudre dans E l'équation $A^5 X = B$ où $A = M(2)$, $B = M(12)$ et $A^5 = A \times A \times A \times A \times A$
6. Montrer que l'ensemble $F = \left\{ M(\ln x) / x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ est un sous-groupe du groupe $(E; \times)$

8-3/ Exercice 2-3

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{R}; +)$ est un groupe commutatif.

Soit a un réel strictement positif.

Soit E le sous-ensemble de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); +; \times)$ définie par :

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Montrer que E est stable dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); \times)$
2. Montrer que l'application φ définie par $\varphi(x) = M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(E; \times)$.
3. Montrer de deux façons différentes que $(E; \times)$ est un groupe commutatif.

8-4/ Exercice 2-4

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{R}; +)$ est un groupe commutatif.

Pour tout réel x, on pose : $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble : $E = \{M(x)/x \in \mathbb{R}\}$

On munit E d'une loi de composition interne T donnée par :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) M(x) T M(y) = M(x+y+1)$$

Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}$ dans E par :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \varphi(x) = M(x-1)$$

1. Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(E; T)$.
2. Montrer que $(E; T)$ est un groupe commutatif.
3. Montrer que pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$: $M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$
4. En déduire que E est stable dans($(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$, et que la loi « $\times$ » est commutative dans E.
5. Montrer que la loi « $\times$ » est distributive par rapport à la loi « T » dans E.
6. Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans $(E; T)$, et que I est l'élément neutre dans $(E; \times)$.
7. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$: $M(x) \times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$
8. Montrer que $(E; T; \times)$ est un corps commutatif.