Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 10-2-2 : Structures algébriques - Partie 2 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IIX- Exercices II

8-1/ Exercice 2-1

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau de zéro $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif.

Pour tous a et b de $\mathbb{R}$, on pose : $M(a;b)=\begin{pmatrix}a&a-b\\b&a+b\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble : $E=\left\{M(a;b)/\,(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1. Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$.
2. Calculer $J^2=J\times J$ où $J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, puis en déduire que E n'est pas une partie stable de $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

On définit sur l'ensemble $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ une loi de composition interne $*$ par $A*B=A\times N\times B$ avec $N=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et qui, à chaque nombre complexe non nul $a+ib$ (a et b deux réels), la matrice $M(a;b)$.

3. Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $(E,*)$

On pose : $E^*=E-\{O\}$

4. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

5. Montrer que $(E^{*};*)$ est un groupe commutatif.
6. Montrer que pour tout $(A;B;C)\in E^{3}$: $A*(B+C)=A*B+A*C$
7. En déduire de ce qui précède que $(E;+;*)$ est un corps commutatif.

8-2/ Exercice 2-2

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau non commutatif.

On considère l'ensemble :

$$E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ x^{2} & 2x & 1\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}\right\}$$

1. Montrer que E est une partie stable de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$
2. Montre que l'application φ qui, à tout réel x, associe la matrice $M(x)$ de E, est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(E;\times)$.
3. En déduire que $(E;\times)$ est un groupe commutatif.
4. Déterminer $(M(x))^{-1}$, la matrice inverse de $M(x)$
5. Résoudre dans E l'équation $A^{5}X=B$ où $A=M(2)$, $B=M(12)$ et $A^{5}=A\times A\times A\times A\times A$
6. Montrer que l'ensemble $F=\left\{M(\ln x)/x\in\mathbb{R}_{+}^{*}\right\}$ est un sous-groupe du groupe $(E;\times)$

8-3/ Exercice 2-3

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau d'unité $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif.

Soit a un réel strictement positif.

Soit E le sous-ensemble de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ définie par :

$$E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}a^{x} & 0 & 0\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}\right\}$$

1. Montrer que E est stable dans $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$
2. Montrer que l'application φ définie par $\varphi(x)=M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(E;\times)$.
3. Montrer de deux façons différentes que $(E;\times)$ est un groupe commutatif.

8-4/ Exercice 2-4

On rappelle que $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau d'unité $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif.

Pour tout réel x, on pose : $M(x)=\begin{pmatrix}1-x & x\\-2x & 1+2x\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble : $E=\{M(x)/x\in\mathbb{R}\}$

On munit E d'une loi de composition interne T donnée par :

$$\left(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2\right)\ M(x)TM(y)=M(x+y+1)$$

Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}$ dans E par :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\ \varphi(x)=M(x-1)$$

1. Montrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(E;T)$.
2. Montrer que $(E;T)$ est un groupe commutatif.
3. Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)$
4. En déduire que E est stable dans($(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$, et que la loi « $\times$ » est commutative dans E.
5. Montrer que la loi « $\times$ » est distributive par rapport à la loi « T » dans E.
6. Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans $(E;T)$, et que I est l'élément neutre dans $(E;\times)$.
7. Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$: $M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=I$
8. Montrer que $(E;T;\times)$ est un corps commutatif.